THEOREME DE BAIRE

Def **Un espace topologique (non vide) séparé X est dit de Baire s'il vérifie la propriété suivante:**

(*): $\forall (O_n)_{n\geq 1}$ suite d'ouverts de X denses dans X : $O = \bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n$ est dense dans X.

- La propriété de Baire est une propriété *topologique.*
- (*) $\Leftrightarrow$ $\forall (F_n)_{n\geq 1}$ suite de fermés de X d'intérieurs vides: $F = \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$ est d'intérieur vide.
- En particulier, si X est de Baire, X ne peut être réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides.

THM **Exemples d'espaces de Baire:**

a) tout espace métrique complet.
b) tout espace topologique localement compact.
c) tout ouvert d'une espace de Baire.

Démonstration :

a) Soit E métrique complet, (O_n) une suite d'ouverts denses et Ω un ouvert non vide de E ; alors: $\exists$ B_1 boule fermée de diamètre $\in$]0,1[, $B_1 \subset \Omega \cap O_1$; noter que $\mathring{B}_1$ est non vide. $\exists$ B_2 boule fermée non vide de diamètre $\in$]0,1/2[, $B_2 \subset \mathring{B}_1 \cap O_2 \subset B_1 \cap O_2$ …

On construit ainsi par récurrence une suite (B_n) décroissante de fermés non vides de E, de diamètres tendant vers 0 , telle que: $\forall n\geq 1$, $B_{n+1} \subset B_n \cap O_{n+1}$; alors: $\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n \subset \Omega \cap \bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n$ (l'intersection des B_n est ici réduite à un singleton). Ce résultat constitue le théorème de Baire.

b) Soit E topologique localement compact; on reprend la même démonstration en choisissant les B_n compacts et d'intérieurs non vides (pour B_1: prendre x dans l'ouvert $\Omega \cap O_1$: x a une base de voisinages compacts, donc admet un voisinage compact B_1 inclus dans $\Omega \cap O_1$; B_1 est d'intérieur non vide; idem pour les suivants; l'intersection des B_n sera non vide - mais non nécessairement réduite à un singleton - dans le compact B_1).

c) Soit E de Baire, A ouvert de E, (O_n) suite d'ouverts de A denses dans A et $O = \cap O_n$; le surlignage et l'exposant "c" correspondent à l'adhérence et le complémentaire *dans E*:

$\forall n$: $U_n = O_n \cup (\bar{A})^c$ est ouvert dans E, et dense, puisque:

$$(\overline{U_n} = \overline{O_n \cup (\bar{A})^c} = \overline{O_n} \cup \overline{(\bar{A})^c} \supset \overline{A} \cup (\bar{A})^c = E).$$

Par Baire: $E = \overline{\cap U_n} = \overline{[\cap O_n] \cup (\bar{A})^c} = \overline{O \cup (\bar{A})^c} = \overline{O} \cup \overline{(\bar{A})^c}$;

mais $A \cap \overline{(\bar{A})^c} \subset A \cap \overline{A^c} = A \cap A^c = \emptyset$ donc $A \subset \overline{O}$, i.e.: O est dense dans A.

Applications:

- **Un espace vectoriel admettant une base algébrique dénombrable non finie ne peut pas être muni d'une norme qui le rende complet** (par exemple: $K[X]$) :

  Soit E un tel espace muni d'une norme quelconque, $(e_n)_{n\geq 1}$ une base algébrique de E et $(F_n)_{n\geq 1} = (\text{Vect}\,(e_1,\ldots,e_n))_{n\geq 1}$: (F_n) est une suite croissante de fermés non vides de E (sevs de dim. finie), d'intérieurs vides (par l'absurde); si E était complet, $\cup F_n$ serait d'intérieur vide; or $\cup F_n = E$: absurde.

  Remarques:

  - On a prouvé qu'un tel espace n'est pas un espace de Baire; en particulier, il n'est pas localement compact, résultat aussi fourni par le théorème de Riesz (il ne faut évidemment pas espérer obtenir grâce à Baire l'intégralité du théorème de Riesz, puisqu'il existe des espaces de dimension infinie non dénombrables et de Baire!).

  - Dans le cas où E , est muni d'une norme dérivant d'un produit scalaire, on peut prouver qu'il n'est pas complet (sans utiliser la propriété de Baire) en exhibant une série d'éléments de E abscv mais non convergente: soit $(e_n)_{n\geq 1}$ une b.o.n de E (obtenue par Schmidt) et $\sum a_n$ une série **cv de réels > 0**; $\sum a_n e_n$ est abscv, mais non convergente: supposons en effet que la suite (S_n) de ses sommes partielles converge vers $S \in E$: $\exists p$, $S \in F_p$; alors: $n\geq p \Rightarrow \|S_n-S_p\| = \|S_n-\text{proj}_{F_p}^{\perp}(S_n)\| = d\,(S_n,F_p) \leq \|S_n-S\|$, donc $(n\to+\infty)$: $\|S-S_p\| = 0$, i.e. $S = S_p$; or $\|S\|^2 = \lim_{n\,\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 > \sum_{k=1}^{p} a_k^2 = \|S_p\|^2$: absurde.

- **Soit $f : R^{+*} \to R$, continue telle que $\forall\, a > 0$, $\lim_{n\to+\infty} f(n.a) = 0$; alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.**

  Soit $\varepsilon > 0$.

  - De: $\forall a > 0$, $\exists p$, $n\geq p \Rightarrow |f(k.a)| \leq \varepsilon]$ on tire: $\bigcup_p \bigcap_{n\geq p} D_n =]0,+\infty[$, où $\forall n$, $D_n = \{x, |f(n.x)|\leq\varepsilon\}$.
  - $\forall n$, D_n est fermé dans $]0,+\infty[$ car f est continue, donc: $\forall p$, $\bigcap_{n\geq p} D_n$ est fermé dans $]0,+\infty[$..
  - $]0,+\infty[$ est de Baire donc: $\exists p$, $\exists \alpha, \beta$, $(0 < \alpha < \beta)$, $[\alpha,\beta] \subset \bigcap_{n\geq p} D_n$; par suite:

    $\forall n\geq p$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$: $|f(k.x)| \leq \varepsilon$, i.e.: $\forall n\geq p$, $\forall\, x \in [n\alpha,n\beta]$: $|f(x)| \leq \varepsilon$.

  - A partir d'un certain rang, les intervalles se chevauchent, et leur extrémité supérieure tend vers $+\infty$. On conclut.

  Remarques:

  - Si f n'est pas continue, le résultat annoncé tombe en défaut. Prenons par exemple $f = 1_A$, où A est l'ensemble $\{x_n = e^n , n \in N\}$. Si a est un réel strictement positif, il existe *au plus* un couple (n,m) d'entiers naturels tel que $na = x_m$ (le contraire entrainerait que e est algébrique), et donc f(na) est stationnaire à 0. Par contre, f n'a pas pour limite 0 en $+\infty$.

  - Si f est uniformément continue, on peut prouver le résultat sans utiliser Baire; on peut même prouver dans ce cas, et pour pas beaucoup plus cher que si pour tout entier p, $(f(n/p))_n$ converge, alors f a une limite en $+\infty$: ces suites ont une limite commune L (puisque $(f(n/p))_n$ et $(f(n/q)_n$ sont des suites extraites de $(f(n/(pq)))_n$).

    Soit $\varepsilon > 0$ et α un module de continuité pour f relatif à ε; fixons $p \geq 1/\alpha$, n_o tel que :
    $n \geq n_o \Rightarrow |f(n/p) - L| \leq \varepsilon$. Alors:

    $x \geq n_o/p \Rightarrow \exists n\geq n_o$, $n/p \leq x < (n+1)/p \Rightarrow |f(x)-L| \leq |f(x)-f(n/p)| + |f(n/p)-L| \leq 2\varepsilon$.

- **Soit $f : R \to R$ dérivable; alors il existe un intervalle non trivial sur lequel f est lipchitzienne**.

La suite (f_n) définie par $f_n(x) = n.(f(x+1/n) - f(x))$ converge simplement vers f '; les f_n sont continues.
L'idée : trouver un intervalle non trivial sur lequel (f_n) est unformément bornée, auquel cas f ' sera bornée et f sera lipchitzienne sur cet intervalle; pour chaque x réel, $(f_n(x))$ est convergente, donc bornée :

$\forall x, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n, |f_n(x)| \leq p$, ce qui se traduit par : $\mathbb{R} = \bigcup_p \bigcap_n \{|f_n| \leq p\}$.

Pour chaque p, $\bigcap_n \{|f_n| \leq p\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$, donc par Baire : il existe un entier p et un intervalle ouvert non vide I tel que $I \subset \bigcap_n \{|f_n| \leq p$.

Vocabulaire:

Dans un espace topologique:

- "G_δ" : "intersection dénombrable d'ouverts" ; "F_σ" : "réunion dénombrable de fermés" .

  Une intersection dénombrable de G_δ est un G_δ ; une réunion dénombrable de F_σ est un F_σ .

  Le complémentaire d'un G_δ est un F_σ , et réciproquement.

  Exemples:

  - Dans $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q}$ est un F_σ (réunion dénombrable de singletons); $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est un G_δ.

  - E top; F métrique; $f : E \to F$; l'ensemble des points de E où f est continue est un G_δ de E.

    ($\forall n, \forall x \in$ Cont f , $\exists U_{n,x}$ voisinage ouvert de x , $y \in U_{n,x} \Rightarrow d(f(x),f(y)) < 1/n$; on vérifie facilement que Cont f = $\bigcap_n \bigcup_{x \in C} U_{n,x}$).

Dans un espace de Baire E:

- Une intersection dénombrable d'ouverts denses (et plus généralement de G_δ denses) est un G_δ dense.
  Une réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides (et plus généralement de F_σ d'intérieurs vides) est un F_σ d'intérieur vide.

  Application: $\mathbb{Q}$ n'est pas un G_δ de $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en est un; si $\mathbb{Q}$ était un G_δ de $\mathbb{R}$, son intersection (vide) avec $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en serait aussi un); il n'y a donc pas d'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que Cont f $= \mathbb{Q}$.

- $A \subset E$ est dit **gras** s'il contient un G_δ dense, et **maigre** s'il est inclus dans un F_σ d'intérieur vide.

  - [$B \subset A$ maigre $\Rightarrow$ B est maigre] ; [$B \supset A$ gras $\Rightarrow$ B est gras].
  - [A est maigre $\Leftrightarrow A^c$ est gras].
    (*exple*): dans $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q}$ est maigre et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est gras.

  - Une réunion dénombrable d'ensembles maigres est un ensemble maigre.
    Une intersection dénombrable d'ensembles gras est un ensemble gras.
  - [A maigre $\Rightarrow \mathring{A} = \emptyset$] ; [A gras $\Rightarrow \overline{A} = E$].

  - Un sous-ensemble ne peut pas être gras et maigre à la fois.
  - [$\mathring{A} = \emptyset \not\Rightarrow$ A maigre] ; [$\overline{A} = E \not\Rightarrow$ A gras]
    dans $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q}$ est dense, mais n'est pas gras.
    dans E : si A est dénombrable, alors A n'est pas gras.

- On dit qu'une propriété est **vraie B-presque partout** si elle l'est sur un ensemble gras, i.e. sauf sur un ensemble maigre; les ensembles maigres jouent le même rôle ici que les parties négligeables dans un espace muni d'une mesure complète.

- **Toute partie de $\mathbb{R}^n$ est réunion d'une partie maigre et d'une partie Lebesgue-négligeable**:
  Les boules considérées sont carrées et ouvertes; $\mathbb{R}^n$ est séparable: soit $A = \{a_k , k \geq 0 \}$ dense; pour $k, p \geq 0$:
  $B_{k,p} = B (a_k , \frac{1}{2^{k+1}.p})$ contient a_k et $\lambda (B_{k,p}) = \left(\frac{1}{2^k.p}\right)^n = \frac{1}{p^n} \cdot \frac{1}{2^{kn}}$; alors: $\forall p$: $B_p = \bigcup_k B_{k,p}$ est un ouvert dense (il contient A), et $\lambda (B_p) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda (B_{k,p}) = \frac{p^{-n}}{1-2^{-n}}$; puis:
  - $X = \bigcap_p B_p$ est gras, donc X^c est maigre.
  - $\forall p, \lambda(X) \leq \frac{p^{-n}}{1-2^{-n}}$, donc $(p \to +\infty)$: $\lambda(X) = 0$ et X est négligeable.

  Alors si $B \subset \mathbb{R}^n$: $B = (X \cap B) \cup (X^c \cap B)$ est réunion d'une partie négligeable et d'une partie maigre.

<u>Autres applications</u>:

- **E, F métriques; E complet; (f_n) suite d'applications continues de E dans F qui converge simplement vers f ; alors l'ensemble des points de continuité de f est gras.**

  1) On traduit: $\forall x, (f_n(x))$ est de Cauchy:

     $\forall x, \forall n, \exists p, q \geq p \Rightarrow d(f_p(x),f_q(x)) \leq 1/n \Rightarrow x \in \{y, d(f_p(y),f_q(y)) \leq 1/n\} = E_{n,p,q}$ fermé (f_p, f_q continues)

     donc $\forall x, \forall n, \exists p, x \in \bigcap_{q \geq p} E_{n,p,q} = E_{n,p}$ fermé;d'où $\boldsymbol{\forall n, \bigcup_p E_{n,p} = E.}$

  2) On note $\mathbf{O} = \bigcap_n \left(\bigcup_p \overset{o}{E}_{n,p} \right) = \bigcap_n \mathbf{O_n}$ et **C** l'ensemble des points de E où f est continue.

     a) Soit n fixé. O_n est ouvert (ok) et dense dans E; en effet: soit Ω ouvert non vide de E :

     - $\underset{\text{fermé de } \Omega}{\bigcup_p [\Omega \cap E_{n,p}]} = \Omega \cap [\bigcup_p E_{n,p}] = \Omega \overset{\Omega \text{ de Baire}}{\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow} \exists q , \emptyset \neq \mathrm{Int}_\Omega(\Omega \cap E_{n,q}) \overset{\Omega \text{ ouvert}}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \Omega \cap \overset{o}{E}_{n,q}$.
     - $\Omega \cap O_n = \Omega \cap [\bigcup_p \overset{o}{E}_{n,p}] = \bigcup_p [\Omega \cap \overset{o}{E}_{n,p}] \supset \Omega \cap \overset{o}{E}_{n,q} \neq \emptyset$; on conclut.

     b) E est de Baire, donc O est un G_δ dense dans E.

     c) $O \subset C$ (et on concluera); en effet: soit $a \in O$ et $n \geq 1$:
     - $a \in O_n$ donc $\exists p, a \in \overset{o}{E}_{n,p} = V \in V(a)$; ainsi:
       $y \in V \Rightarrow \forall q \geq p: d(f_p(y),f_q(y)) \leq 1/n \overset{(q \to +\infty)}{\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow} d(f_p(y),f(y)) \leq 1/n$.
     - f_p est continue en a, donc: $\exists W \in V(a), y \in W \Rightarrow d(f_p(y),f_p(a)) \leq 1/n$.
     - Alors: $y \in V \cap W \Rightarrow d((f(y),f(a)) \leq d(f(y),f_p(y)) + d(f_p(y),f_p(a)) + d(f_p(a),f(a)) \leq 3/n$; on conclut.

- **Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ est C^1 B-presque partout.**

  Il suffit d'écrire le résultat précédent avec $E = F = \mathbb{R}$ et $f_n: x \to n.(f(x+1/n) - f(x))$.

- **Dans $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\| . \|_\infty$, l'ensemble A des fonctions nulle part dérivables est gras.**

(un exemple d'une telle fonction en est fourni par la fonction de Van Der Waerden).
On pose pour $n \geq 0$: $O_n = \{f, \forall x, \exists y, |f(x)-f(y)| > n.|x-y|\}$ et on vérifie que:

a) $\forall n$, O_n est ouvert dans E.
b) $\forall n$, O_n est dense dans E.
c) $O = \bigcap_{n\geq 0} O_n$ est un G_δ dense dans E.
d) $O \subset A$.

a) (n fixé) soit (f_p) une suite d'éléments de O_n^c convergeant uniformément vers f ; on a:

$$\forall p, \exists x_p, \forall y, |f_p(x_p)-f_p(y)| \leq n.|x_p-y| ;$$

(x_p) a une sous suite convergente; quitte à remplacer (x_p) par cette sous-suite et (f_p) par la sous-suite correspondante, on peut supposer que (x_p) cv vers x ;

alors $(f_p(x_p))$ cv vers x et pour y fixé, on a, par passage à la limite: $|f(x)-f(y)| \leq n.|x-y|$, donc $f \in O_n^c$.

b) (n fixé) soient $f \in E$ et $\varepsilon > 0$; on cherche $h \in E$, $\|h\|_\infty \leq 1$, telle que $f+\varepsilon.h \in O_n$. Par Weierstrass, on peut supposer f polynomiale, et donc:

$$\forall x,y , x \neq y , |T_f(x,y)| = \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq M = \|f'\|_\infty .$$

La condition $f+\varepsilon h \in O_n$ s'écrit: $\forall x, \exists y\neq x, |T_{f+\varepsilon h}(x,y)| > n$.

Moyennant les inégalités $|T_{f+\varepsilon h}| = |T_f + \varepsilon.T_h| \geq \varepsilon.|T_h| - |T_f|$, il *suffit donc* d'avoir:

$$\forall x, \exists y\neq x, |T_h(x,y)| > \frac{M+n}{\varepsilon} = A \text{ , sans oublier la condition } \|h\|_\infty \leq 1.$$

On construit facilement une telle fonction h avec un graphe en dents de scie de pentes successives A+1, -(A+1),… dans le carré $[0,1]^2$.

c) E est complet, donc de Baire…

d) Soit $f \in E$ et $x \in [0,1]$; si f est dérivable en x, alors $g: y \to T_f(x,y)$ est bornée sur $[0,1] -\{x\}$ (car prolongeable en une fonction continue sur [0,1]); il ne peut donc exister une suite (y_n) de $[0,1] - \{x\}$ telle que $\lim_{n \to +\infty} |T_f(x,y)| = +\infty$.

<u>Références</u>:

- Eléments d'analyse pour l'agrégation. Zuily-Queffelec. Masson. P258 et suivantes.
- Topologie et séries. Moisan-Vernotte. Ellipses.
- Topologie générale et analyse fonctionnelle. Schwarz. Hermann.
- Exercices de mathématiques pour l'agrégation. Analyse II. Chamberloir et Fermigier. Masson.
- Analyse réelle et complexe. Rudin. Masson.