THEOREME DE BANACH-STEINHAUS.

THM BST E banach; F evn; $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ famille d'éléments de $L_c(E,F)$.

1) $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ est bornée $\Leftrightarrow \forall x \in E$, $(T_\alpha(x))_{\alpha\in A}$ est bornée.

2) Si ce n'est pas le cas: $\{x \in E$, $(T_\alpha(x))_{\alpha\in A}$ n'est pas bornée$\}$ est gras dans E.

En particulier, dans le cas d'une suite (T_n): si $\sup_n \|T_n\| = +\infty$, alors $\{x \in E, (T_n(x))_n$ diverge$\}$ est gras dans E.

Démonstration:

Si (T_α) est bornée, alors chaque $(T_\alpha(x))_\alpha$ est bornée (clair).

Notons $M = \{x, (T_\alpha(x))_\alpha$ est bornée$\} = \bigcup_n \bigcap_\alpha \{x, \|T_\alpha(x)\| \le n\} = \bigcup_n F_n$ (fermés).

- Si M = E: par Baire, l'un des F_n est d'intérieur non vide: $\exists n, \exists x_o, \exists r > 0, \forall \alpha, \forall z, \|z\| \le 1 \Rightarrow \|T_\alpha(x_o + r.z)\| \le n$.
  Alors $\|z\| \le 1 \Rightarrow \forall \alpha$: $\|T_\alpha(z)\| \le \frac{2n}{r}$: $(T_\alpha)_\alpha$ est bornée par 2n/r.

- Si $(T_\alpha)_\alpha$ n'est pas bornée, alors les F_n sont tous d'intérieurs vides (par l'absurde, avec ce qui précède) donc M est maigre; son complémentaire est gras.

Le résultat est faux si E n'est pas complet.

Contre-exemples:

$E = \mathbb{R}[X]$, $\|P\| = \max |\text{coeffts}|$, et $T_n: P \to P^{(n)}(0)$:

Pour n fixé: T_n est (linéaire) continue car $\forall P$: $|T_n(P)| \le (n!).\|P\|$. (égalité pour $P = X^n$, donc $\|T_n\| = n!$).

Pour P fixé: $(T_n(P))_n$ est bornée car stationnaire à 0.

$(\|T_n\|) = (n!)$ n'est pas bornée.

$E = C^1([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\,.\,\|_\infty$, et $T_h: f \to \frac{f(h) - f(0)}{h}$ $(0<h<1)$:

chaque T_h est linéaire continue ($\forall f$, $|T_h(f)| \le \frac{2}{h}.\|f\|_\infty$) de norme $\frac{2}{h}$ (norme atteinte: prendre f de norme 1 telle que f(h) =1 et f(0) = -1) et donc $(T_h)_h$ n'est pas bornée; par contre, à f fixée, $(T_h(f))_h$ est bornée par $\|f'\|_\infty$.

Applications:

- **E banach; F evn; une limite simple d'ALC de E dans F est une ALC.**

  Soit (T_n) suite d'éléments de $L_c(E,F)$ tq $\forall x \in E$, $\lim_{n\to+\infty} T_n(x) = T(x)$; T est linéaire (clair); pour chaque x , $(T_n(x))_n$ converge, donc est bornée, d'où (BST):

  $$\exists M, \forall n, \|T_n\| \le M \text{ ; alors: } \|x\| = 1 \Rightarrow \forall n, \|T_n(x)\| \le M, \text{ et à la limite : } \|T(x)\| \le M :$$

  T est continue (de norme $\le$ M).

- **(Suites complexes dans les espaces l^p): $1 \le p \le +\infty$; $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; si $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est telle que $\forall (b_n) \in l^p$, $\sum a_n b_n$ converge, alors $(a_n) \in l^q$.**

  Inégalité de Hölder dans $\mathbb{R}^{n+1}$: $\forall n \ge 0$, $\forall (a_o,\dots,a_n), (b_o,\dots,b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$: $\left| \sum_{k=0}^{n} a_k b_k \right| \le \|(a_o,\dots,a_n)\|_q . \|(b_o,\dots,b_n)\|$

  Soit (a_n) vérifiant l'hypothèse; on vérifie que: $\forall m \ge 0$: $T_m : (b_n) \to \sum_{k=0}^{m} a_k b_k$ est une FLC sur l^p, de norme

  $\|T_m\| = \|(a_o,\dots,a_m)\|_q$

  (pour l'égalité, distinguer les cas $p = 1$, $p = +\infty$ et $1 < p < +\infty$; dans le dernier cas, prendre $b_k = \frac{|a_k|^q}{a_k}$ pour $k \le m$ et a_k non nul, 0 sinon 0).

  De plus: $\forall b \in l^p$, $(T_m(b))_{m \ge 0}$ est bornée car convergente; alors par BST: $(\|T_m\|)_{m \ge 0}$ est bornée; ceci entraîne bien: $(a_n) \in l^q$.

  Ce résultat se généralise aux espaces $L^p = L^p(E,T,\mu,\mathbb{K})$ où (E,T,μ) est un espace mesuré et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: si $f : E \to \mathbb{K}$ mesurable est telle que: $\forall g \in L^p$: $f.g \in L^1$, alors f est élément de L^q (on notera que dans le cas $(E,T,\mu) = (\mathbb{N},P(\mathbb{N}),\delta_{\mathbb{N}})$, le résultat obtenu est un peu plus fort).

- **E ou F banach; G evn; $u : E \times F \to G$ bilinéaire; alors: u est continue ssi u est séparément continue. (i.e. les applications $u(x ,\bullet)$ et $u (\bullet , y)$ sont continues pour tout x dans E et tout y dans F).**

  L'implication directe est toujours vraie que u soit ou non bilinéaire, et que E et F soient ou non complets.

  Supposons u séparément continue et F complet.

  Pour $\|x\| \le 1$ et $y \in F$, , nous avons:

  $\|u(x,y)\| \le \|u(.,y)\|.\|x\| \le \|u(.,y)\|$.

  La suite $(u(x,.))_{\|x\| \le 1}$ est ponctuellement bornée, donc bornée par un $K > 0$ par BST; par suite:

  $\forall x,y$, $\|x\| \le 1$, $\|y\| \le 1 \Rightarrow \|u(x,y)\| = \|u(x,.)(y)\| \le K$.

  Finalement:

  $\forall (x,y) \in E \times F$: $\|u(x,y)\| \le K.\|x\|.\|y\|$: u est continue.

  Si F n'est pas complet, on procède symétriquement avec E complet.

  Le résultat est faux si E et F ne sont pas complets; par exemple:$E = F = G = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme

  $\|P\|_\infty = \max |\text{coeffts}|$, et $u:(P,Q) \to P.Q$; les applications partielles sont continues (il suffit de vérifier que

  $P \to X^n P$ est continue pour tout entier n, ce qui est évident), mais u n'est pas continue (on pourra prendre par exemple $P_n = Q_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$).

  Le résultat est faux si u n'est pas bilinéaire! voir par exple $u(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ ou 0 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

- **Séries de Fourier: [1] $E = C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, muni de la norme $\|\,.\,\|_\infty$, est complet.**

  $\forall x \in \mathbb{R}$, $E_x = \{f \in E, \sup_n |S_n(f)(x)| = +\infty\}$ est gras dans E.

Rappel des notations: $\forall n$, $\forall x$, $S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k.e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}.\int_{-\pi}^{\pi} f(t).D_n(x-t).dt$ avec:

$D_n(u) = \sum_{k=-n}^{n} e^{iku} = \frac{\sin(n+1/2).u}{\sin(u/2)}$ sur $\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$;

D_n est paire, 2π-périodique, C^∞ ; $\frac{1}{2\pi}.\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u).du = 1$.

Démonstration:

On se ramène à x = 0 par translation: $\forall n$, on pose $\Gamma_n : E \to \mathbb{R}$, $\Gamma_n(f) = S_n(f)(0)$. $\forall n$, Γ_n est continue de norme $\frac{1}{2\pi}.\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|.dt$.

(La continuité est évidente, avec $\|\Gamma_n\| \le \frac{1}{2\pi}.\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|.dt$. Pour l'égalité, considérer par exemple la suite $(f_p = \frac{D_n}{|D_n|+1/p})$ et appliquer le théorème de convergence dominée).

En minorant simplement $\|\Gamma_n\|$, on montre que sa limite est $+\infty$:

$$\|\Gamma_n\| = \frac{1}{\pi}.\int_0^{\pi} \frac{|\sin(n+1/2)t|}{\sin(t/2)}.dt \ge \frac{2}{\pi}.\int_0^{\pi} \frac{|\sin(n+1/2)t|}{t}.dt = \frac{2}{\pi}.\int_0^{(n+1/2)\pi} \frac{|\sin t|}{t}.dt \ge \frac{2}{\pi}.\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}.dt .$$

(en procédant plus précisément, on montre que $\|\Gamma_n\| \sim \frac{4.\ln n}{\pi^2}$)

Donc (corollaire de BST): E_o est gras.

Remarques:

- A fortiori: $\forall x$: $\{f \in E$, SF(f)(x) diverge$\}$ est gras dans E; un exemple concret en est donné dans le cours sur les séries de Fourier: celui d'une fonction continue dont la série de Fourier diverge en 0.

- Il existe **G gras dans E tq: $\forall f \in G$, $\{x, \sup_n |S_n(f)(x)| = +\infty\}$ est gras dans $\mathbb{R}$:**
  Posons $\mathbb{Q} = \{r_m, m \in \mathbb{N}\}$ et $G = \bigcap_m E_{r_m}$; par Baire: G est gras dans E; soit $f \in G$; on a déjà:

  $$\forall m, \sup_n |S_n(f)(r_m)| = +\infty \text{ ; puis: } \{x, \sup_n |S_n(f)(x)| = \infty\} = \bigcap_p \{x, \sup_n |S_n(f)(x)| > p\} = \bigcap_p O_p \ .$$

  Chaque O_p est ouvert ($O_p = \bigcup_n \{x, |S_n(f)(x)| > p\}$) et dense dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{Q} \subset O_p$): $\bigcap_p O_p$ est un G_δ dense dans $\mathbb{R}$: il est gras.

- **Interpolation de Lagrange: $E = C([0,1],\mathbb{R})$ est muni de $\| \cdot \|_\infty$; pour $n \geq 1$, $P_n(f)$ désigne le polynôme interpolateur de f aux k/n , k = 0,...,n; alors**

  $\{f \in E, \sup_n \|P_n(f)\|_\infty = +\infty\}$ est gras dans E.

Démonstration:

Soit n fixé; on pose $\forall\ k = 0, ...,n$: $L_k(X) = \dfrac{\prod_{i\neq k} (X - i/n)}{\prod_{i\neq k} (k/n - i/n)}$; alors $\forall\ f \in E$: $P_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f(k/n).L_k$.

- P_n est linéaire de E dans E, continu, avec $\|P_n\| \leq \| \sum_{k=0}^{n} |L_k| \ \|_{\infty,[0,1]} = \lambda_n$. On a même l'égalité:

  $\sum_{k=0}^{n} |L_k|$ est continue sur [0,1], et son sup est atteint en un $c \in [0,1]$; on prendra f de norme 1 telle que:

  $f(k/n) = 1$ si $L_k(c) \geq 0$, et $f(k/n) = -1$ si $L_k(c) < 0$ pour s'en convaincre.

- On vérifie que $\sup_n \lambda_n = +\infty$, ce qui prouvera la proposition par BST; pour $n \geq 2$:

$$\left| L_k\left(\frac{1}{2n}\right)\right| = \frac{\prod_{i=1}^{n} (2i-1)}{|2k-1|.2^n.k!(n-k)!} = \frac{(2n)!}{|2k-1|.2^{2n}.n!k!(n-k)!} \geq \frac{(2n)!}{2n.2^{2n}.n!k!(n-k)!} = C_n^k \frac{(2n)!}{2^{2n+1}.n.(n!)^2}$$

puis:

$$\lambda_n \geq \sum_{k=0}^{n} \left| L_k\left(\frac{1}{2n}\right)\right| \geq \frac{(2n)!}{2^{n+1}.n.(n!)^2} \sim \frac{2^{n-1/2}}{n.\sqrt{2\pi n}} \text{ qui tend vers } +\infty \text{ ; conclure.}$$

C'est le phénomène de Runge. On en trouvera un exemple concret dans le cours sur les approximations uniformes ($f : x \to f(x) = \dfrac{1}{\alpha^2+x^2}$ sur [-1,1])

La démonstration s'étend facilement au cas de $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, avec les points d'interpolation régulierement distribués.

Pour le choix des points de Tchebychev, on prouve dans [3] la minoration $\lambda_n \geq \dfrac{2}{\pi}.\ln n$, d'où le même résultat, mais cela utilise le théorème de Jackson (même référence).

Pour un choix quelconque des points d'interpolation, la première partie de la démonstration s'applique sans problème.

Erdös a montré en 1961 qu'il existe une constante c telle que pour tout choix des points d'interpolation, on a:

$$\lambda_n \geq \frac{2}{\pi}.\ln n - c .$$

- **Intégration numérique: théorème de Polya.**

(cf le cours sur les polynômes orthogonaux pour le détail).

I intervalle de $\mathbb{R}$; p poids sur I tel que pour tout n, $t \to |t|^n.p(t)$ soit intégrable sur I .

Pour $n \geq 0$ et $x_{o,n}, \ldots, x_{n,n}$ arbitrairement choisis (deux à deux distincts) dans I, $a_{o,n}, \ldots, a_{n,n}$ désignent les coefficients qui assurent une méthode de quadrature du type interpolation $\int_I f(t)p(t)dt \approx \sum_{k=0}^{n} a_k.f(x_k)$ d'ordre au moins n, i.e. telle que $Err_n(f) = \int_I f(t)p(t)dt - \sum_{k=0}^{n} a_k.f(x_k)$ soit nulle pour f polynomiale de degré $\leq n$.

On vérifie que pour tout n, Err_n est une forme linéaire continue sur $(C(I), \|.\|_\infty)$, de norme

$$\|Err_n\| = \int_I p(t)dt + \sum_{k=0}^{n} |a_{k,n}|.$$

Le théorème de Banach-Steinhaus montre que la méthode $[(x_{k,n}); (a_{k,n})]$ converge sur C(I) si et seulement si la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} |a_{k,n}|\right)_{n\geq 0}$ est bornée.

- **X top compact; $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; E = C(X,$\mathbb{K}$). Toutes les normes sur E qui rendent E complet et entraînent la convergence simple sont équivalentes.**

Soit $\| . \|$ une telle norme; pour $x \in X$, on note $T_x : (E, \| . \|) \to \mathbb{K}$, $T_x(f) = f(x)$.

Soit x fixé dans X : T_x est linéaire (clair) continu car si (f_n) est une suite de E telle que $\lim \|f_n\| = 0$, alors:

$\lim f_n(x) = 0$ (par hypothèse), i.e. $\lim T_x(f_n) = 0$.

Soit f fixée dans E ; la famille $[T_x(f)]_{x\in X} = [f(x)]_{x\in X}$ est bornée dans $\mathbb{K}$ (par $\| f \|_\infty$).

Alors par Banach-Steinhaus: $(T_x)_{x\in X}$ est bornée dans $L_c((E,\|.\|),\mathbb{K})$:

$\exists k > 0, \ \forall x \in X, \|T_x\| \leq k$,

d'où:

$\forall x \in X$, $\forall f \in E$, $|T_x(f)| = |f(x)| \leq k.\| f \|$, et donc: $\forall f \in E$, $\| f \|_\infty \leq k.\| f \|$.

On conclut avec un des corollaires du théorème d'homéomorphisme de Banach.

<u>Références</u>:

[1] Analyse réelle et complexe. Rudin. Masson.

[2] Eléments d'analyse pour l'agrégation. Zuily-Queffelec. Masson.

[3] Exercices de mathématiques pour l'agrégation. Analyse II. Chamberloir et Fermigier. Masson.