Je ne suis pas l'auteur de ce texte : c'est la rédaction qui m'a été transmise par R. Leclercq et G. Ramelet pour la solution de l'exercice **3.3** sur *l'inégalité de Young*. Cette solution me semble très bonne, meilleure que celle que j'avais de mon côté.

Inégalité de Young

Théorème (inégalité de Young). *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue, strictement croissante et surjective, vérifiant $f(0) = 0$. On note $g = f^{-1}$, F et G, respectivement, les applications qui à x associent $\int_0^x f(t)\,dt$ et $\int_0^x g(t)\,dt$. On a alors*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}(x) + \mathrm{G}(y) \geq x \,.\, y$$

et l'égalité est vérifiée pour $y = f(x)$.

Commençons par démontrer le cas d'égalité.

Démonstration (cas d'égalité). Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on découpe les intégrales définissant $\mathrm{F}(x)$ et $\mathrm{G}(f(x))$ en partitionnant $[0, x]$ (resp. $[0, f(x)]$) en n intervalles du type $[kx/n, (k+1)x/n]$ (resp. $[f(kx/n), f((k+1)x/n)]$, car f est croissante et bijective).

Il vient

$$\mathrm{F}(x) + \mathrm{G}(f(x)) = \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\int_{kx/n}^{(k+1)x/n} f(t)\,dt + \int_{f(kx/n)}^{f((k+1)x/n)} g(t)\,dt \Big).$$

Or, f et g étant croissantes, on a aisément les encadrements suivants :

$$\frac{x}{n}\, f\Big(\frac{kx}{n}\Big) \leq \int_{kx/n}^{(k+1)x/n} f(t)\,dt \leq \frac{x}{n}\, f\Big(\frac{(k+1)x}{n}\Big) \quad \text{et}$$

$$\Big[f\Big(\frac{(k+1)x}{n}\Big) - f\Big(\frac{kx}{n}\Big)\Big] \,.\, \frac{kx}{n} \leq \int_{f(kx/n)}^{f((k+1)x/n)} g(t)\,dt \leq$$

$$\leq \Big[f\Big(\frac{(k+1)x}{n}\Big) - f\Big(\frac{kx}{n}\Big)\Big] \,.\, \frac{(k+1)x}{n},$$

en majorant (resp. minorant) les intégrales par le produit de la longueur de l'intervalle et des valeurs maximales (resp. minimales) de f et g (et en ne perdant pas de vue que $g \circ f = \mathrm{I}d$).

On obtient donc, en réorganisant les termes de la somme,

$$\mathrm{F}(x) + \mathrm{G}(f(x)) \geq \sum_{k=0}^{n-1} \Big[\frac{k}{n}\, f\Big(\frac{(k+1)x}{n}\Big) - \frac{k-1}{n}\, f\Big(\frac{kx}{n}\Big)\Big] \,.\, x, \quad \text{et}$$

$$\mathrm{F}(x) + \mathrm{G}(f(x)) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \Big[\frac{(k+2)}{n}\, f\Big(\frac{(k+1)x}{n}\Big) - \frac{k+1}{n}\, f\Big(\frac{kx}{n}\Big)\Big] \,.\, x.$$

Or les termes des sommes s'annulant deux à deux, il reste en définitive :

$$\Big(\frac{n-1}{n}\, f(x) + \frac{1}{n}\, f(0)\Big) \,.\, x \leq \mathrm{F}(x) + \mathrm{G}(f(x)) \leq \Big(\frac{n+1}{n}\, f(x) - \frac{1}{n}\, f(0)\Big) \,.\, x.$$

Cet encadrement étant vrai pour tout entier n non nul, on passe à la limite quand n tend vers l'infini. Les termes extrêmes de l'encadrement tendant tous les deux vers $x \,.\, f(x)$, le théorème des gendarmes permet de conclure : $\mathrm{F}(x) + \mathrm{G}(f(x)) = x \,.\, f(x)$.

Démontrons à présent l'inégalité de Young :

Démonstration (inégalité de Young). Fixons x et étudions l'application ϕ_x définie par $\phi_x(y) = xy - \mathrm{G}(y) - \mathrm{F}(x)$. Elle est dérivable, de dérivée $\phi'_x(y) = x - g(y)$. Comme g est strictement croissante, on en déduit que ϕ_x admet un maximum pour la valeur $y = f(x)$. Il vient :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad xy - \mathrm{F}(x) - \mathrm{G}(y) \leq \phi_x(f(x))$$

et le cas d'égalité ($\phi_x(f(x)) = 0$) permet de conclure.