Université de Rennes 1 – Préparation
à l'agrégation de mathématiques
http://agreg-maths.univ-rennes1.fr

# Équirépartition presque sûre pour $f(x) = 2x$ modulo 1

Jean-Baptiste Bardet – 26 mai 2005

On étudie le comportement des suites définies par récurrence $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x)$, où $x_0 = x \in [0;1)$ et $f(x) = 2x \mod 1$, et on montre que

**Théorème 1.** *Pour Lebesgue presque tout point $x \in [0;1)$, la suite $(f^n(x))_{n\geq 0}$ est équirépartie sur $[0;1)$, c'est-à-dire vérifie que pour tous $0 \leq a < b \leq 1$*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{Card}\{0 \leq k < n : a \leq f^k(x) < b\}}{n} = b - a$$

*Remarques :* Si on connaît le théorème ergodique de Birkhoff, il suffit de montrer que la mesure de Lebesgue est ergodique pour $f$, ce qui est très simple, et de conclure avec le théorème ergodique. L'objectif ici est d'utiliser un outil plus simple, la loi des grands nombres pour des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes.
On peut aussi considérer que $f$ est définie sur le tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, où elle est continue, mais ça ne changerait rien aux arguments. On travaillera donc ici sur $I = [0;1)$, où l'utilisation d'intervalles semi-ouverts permettra d'enlever toute ambiguité sur les écritures diadiques des réels.

1. Les cas les plus simples sont ceux où $x_0$ est un point périodique (ou son orbite aboutit à une orbite périodique). On trouve facilement les points périodiques de $f$ :

$$\begin{aligned} x \text{ est périodique de période } n \quad &\Leftrightarrow \quad f^n(x) = 2^n x = x + k \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{k}{2^n - 1} \text{ pour } 0 \leq k < 2^n - 1 \end{aligned}$$

Le nombre de points périodiques augmente donc exponentiellement vite avec la période, mais ils donnent peu d'information sur la dynamique globale, car ils sont tous répulsifs (la dérivée de $f$ est partout égale à 2), donc une orbite, même passant très près d'une orbite périodique, s'en éloigne ensuite exponentiellement vite.

2. On commence par démontrer le théorème pour le cas particulier où $a = 1/2$ et $b = 1$. Pour cela, on subdivise l'intervalle $I$ en deux sous-intervalles $I_0 = [0;1/2)$ et

$I_1 = [1/2; 1)$, et on associe à chaque $x \in [0;1)$ un codage par une suite $(X_n(x))_{n\geq 0}$ définie par

$$X_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in I_0 \\ 1 & \text{si } x \in I_1 \end{cases} \qquad X_1(x) = X_0(f(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \in I_0 \\ 1 & \text{si } f(x) \in I_1 \end{cases}$$
$$X_n(x) = X_0(f^n(x)) \qquad \text{i.e. } f^n(x) \in I_{X_n(x)}$$

La propriété essentielle de ce codage est

**Lemme 1.** *Pour tout $n \geq 1$,*

$$x \in I_n(x) = \Big[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{X_k(x)}{2^{k+1}}; \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X_k(x)}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^n}\Big) \tag{1}$$

*Démonstration.* On démontre par récurrence sur $n$ que $x \in I_n(x)$ et $f^n$ est linéaire croissante (de pente $2^n$) bijective de $I_n(x)$ sur $[0;1)$ :

• pour $n = 1$, par définition de $X_0$, $x$ appartient à $I_{X_0(x)} = [\frac{X_0(x)}{2}; \frac{X_0(x)}{2} + \frac{1}{2}) = I_1(x)$, et $I_0$ et $I_1$ sont les deux intervalles de bijectivité de $f$.

• Si $f^n$ est linéaire croissante de $I_n(x)$ sur $[0;1)$ et $f^n(x) \in I_{X_n(x)}$, alors

$$x \in I_n(x) \cap f^{-n}(I_{X_n(x)}) = I_{n+1}(x)$$

intervalle sur lequel $f^{n+1} = f \circ f^n$ est linéaire de pente $2^{n+1}$ par composition. □

On en déduit, en faisant tendre $n$ vers l'infini,

**Lemme 2.** *La suite $X_n$ donne une écriture diadique de $x$*

$$x = \sum_{k\geq 0} \frac{X_k(x)}{2^{k+1}}$$

On munit maintenant $I$ de la tribu borélienne $\mathcal{B}$ et de la mesure de Lebesgue $m$.

**Lemme 3.** *Sur l'espace de probabilité $(I, \mathcal{B}, m)$, la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.*

*Démonstration.* Il suffit de vérifier que pour tout $n \geq 1$ et tous $(l_0, l_1, \ldots, l_{n-1}) \in \{0;1\}^n$
$$m\big(x : X_0(x) = l_0, X_1(x) = l_1, \ldots, X_{n-1}(x) = l_{n-1}\big) = \frac{1}{2^n}$$
ce qui est immédiat en remarquant que l'expression $(1)$ se reformule
$$\big\{x : X_0(x) = l_0, X_1(x) = l_1, \ldots, X_{n-1}(x) = l_{n-1}\big\} = \Big[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{l_k}{2^{k+1}}; \sum_{k=0}^{n-1} \frac{l_k}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^n}\Big)$$
□

On peut alors appliquer la loi des grands nombres[1] à cette suite de variables aléatoires, avec
$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} X_k(x) = \text{Card}\ \{0 \leq k < n : 1/2 \leq f^k(x) < 1\}$$

**Proposition 1.** *Pour m-presque tout x*
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\text{Card}\ \{0 \leq k < n : 1/2 \leq f^k(x) < 1\}}{n} = \frac{1}{2} = \mathbb{E}(X_0)$$
*ou, de manière équivalente, l'écriture en base* 2 *de m-presque tout x contient une proportion* $\frac{1}{2}$ *de* 1 *(et une proportion* $\frac{1}{2}$ *de* 0*).*

3. L'étape suivante consiste à remarquer qu'on peut faire exactement la même chose pour l'écriture en toute base entière $r \geq 2$ : on considère $f_r(x) = rx \mod 1$, le découpage en sous-intervalles $I_j^{(r)} = [\frac{j}{r}; \frac{j+1}{r}]$, la suite $X_k^{(r)}(x)$ définie par $f_r^k(x) \in I_{X_k^{(r)}(x)}^{(r)}$, qui vérifie encore

• la suite $(X_k^{(r)}(x))_{k \geq 0}$ donne l'écriture de $x$ en base $r$ : $x = \sum_{k \geq 0} \frac{X_k^{(r)}(x)}{r^{k+1}}$

• sur l'espace de probabilité $(I, \mathcal{B}, m)$, $(X_k^{(r)})_{k \geq 0}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\frac{1}{r} \sum_{j=0}^{r-1} \delta_{\{j\}}$.

La loi des grands nombres donne alors

[1]Remarque importante, il suffit ici d'invoquer la version $L^4$, très simple à obtenir, de la loi des grands nombres.

**Proposition 2.** *Pour m-presque tout x, pour tout* $0 \leq j < r$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{Card}\,\{0 \leq k < n \,:\, f_r^k(x) \in I_j^{(r)}\}}{n} = \frac{1}{r}$$

*ou, de manière équivalente, l'écriture en base r de m-presque tout x contient une proportion* $\frac{1}{r}$ *de chaque chiffre.*

On notera dans la suite $\Omega_r$ le sous-ensemble de $I$ de mesure 1 sur lequel cette proposition est valable. Il est remarquable que pour $x \in \cap_{r\geq 2}\Omega_r$, ensemble qui est encore de mesure 1, les chiffres de l'écriture de $x$ sont équidistribués en toute base.[2]

4. On revient au cas de $f = f_2$, et on remarque que les intervalles de la forme $[\frac{i}{2^l}; \frac{i+1}{2^l}) = I_i^{(2^l)}$ apparaissent naturellement dans la décomposition en base $2^l$, pour laquelle $f_{2^l} = f^l$.
Par ailleurs, il est utile de remarquer que pour tout borélien $A$ de $[0;1)$

- la mesure de Lebesgue $m$ vérifie que $m(A/2) = m(A)/2$, où $A/2 = \{x/2 : x \in A\}$ et est invariante par translation ;
- $f^{-1}(A)$ est l'union disjointe de $A/2$ et $1/2 + A/2$ ;
- donc $m(f^{-1}(A)) = m(A)$.

Ainsi, l'ensemble $\tilde{\Omega}_l = \cap_{j=0}^{l-1} f^{-j}(\Omega_{2^l})$ est de mesure 1, et pour tout $x \in \tilde{\Omega}_l$ on a pour tout $0 \leq i < 2^l$

$$\lim_{q\to+\infty} \frac{\mathrm{Card}\{0 \leq k < ql \,:\, f^k(x) \in [\frac{i}{2^l}; \frac{i+1}{2^l})\}}{ql} = \lim_{q\to+\infty} \frac{1}{l} \sum_{j=0}^{l-1} \frac{\mathrm{Card}\{0 \leq k < q \,:\, f^{kl+j}(x) \in [\frac{i}{2^l}; \frac{i+1}{2^l})\}}{q} = \frac{1}{2^l}$$

en appliquant la Proposition 2 à $x$, $f(x), \ldots, f^{l-1}(x)$.

En écrivant $\lfloor \frac{n}{l} \rfloor l \leq n = \lfloor \frac{n}{l} \rfloor l + r \leq (\lfloor \frac{n}{l} \rfloor + 1)l$, on obtient aisément

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{Card}\{0 \leq k < n \,:\, f^k(x) \in [\frac{i}{2^l}; \frac{i+1}{2^l})\}}{n} = \frac{1}{2^l}$$

[2]Il peut être raisonnable de s'arrêter ici pour faire un développement respectant le timing... On n'a pas démontré à proprement parler l'équirépartition de la suite $(f^n(x))_{n\geq 0}$ annoncée en Théorème, mais l'équidistribution (presque sûre) des chiffres en toute base, résultat intéressant en soi.

Il reste alors à traiter le cas d'un intervalle $[a;b)$ quelconque. On définit deux suites approximantes $a_l$ et $b_l$ par

$$\frac{a_l}{2^l} \leq a < \frac{a_l+1}{2^l} \qquad \frac{b_l}{2^l} \leq b < \frac{b_l+1}{2^l}$$

ce qui implique $[\frac{a_{l+1}}{2^l}; \frac{b_l}{2^l}) \subset [a;b) \subset [\frac{a_l}{2^l}; \frac{b_l+1}{2^l})$ et

$$\lim_{l\to\infty} \frac{b_l}{2^l} - \frac{a_{l+1}}{2^l} = \lim_{l\to\infty} \frac{b_l+1}{2^l} - \frac{a_l}{2^l} = b-a$$

et entraîne donc pour tout $x \in \Omega = \cap_{l\geq 1}\tilde{\Omega}_l$ (avec $m(\Omega) = 1$))

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\text{Card}\{0 \leq k < n : a \leq f^k(x) < b\}}{n} = b-a$$

5. Remarque subsidiaire : évidemment le raisonnement du point 4, donc le théorème, se généralisent aussi, de la même manière, à toutes les fonctions $f_r$, avec $r$ entier plus grand que 2.

# Références

[1] P. Billingsley, Probability and measure (3rd edition). John Wiley & Sons, Inc., New York (1995).