1 Sous-espaces de dimension finie de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ stables par translations

Théorème. *Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie n. Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit l'endomorphisme τ_a de E par $\tau_a f(x) = f(x-a)$.*
Alors F est stable par tous les endomorphismes τ_a ($a \in \mathbb{R}$)) si et seulement si F est l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n à coefficients constants.

Preuve.
Si F est l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n à coefficients constants, alors F est un sous-espace vectoriel de E de dimension n d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire. De plus, il est clair qu'un tel sous-espace est stable par translations.

Réciproquement, supposons que F soit stable par translations. Soit $(f_1, ..., f_n)$ une base de F. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $i \in \{1, ..., n\}$, on a $\tau_{-a} f_i \in F$ donc il existe des scalaires $\lambda_{i1}(a)$, ..., $\lambda_{in}(a)$ tels que $f_i(x+a) = \sum_{k=1}^n \lambda_{ik}(a) f_k(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ $(*)$. Pour $x \in \mathbb{R}$, notons $F_k(x) = \int_0^x f_k(t)\mathrm{d}t$. En intégrant la relation précédente, on a $\int_0^x f_i(t+a)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^n \lambda_{ik}(a) F_k(x)$, soit encore après un changement de variable évident $F_i(x+a) - F_i(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_{ik}(a) F_k(x)$.

Les f_i étant linéairement indépendantes, les F_i le sont aussi (sinon on obtiendrait par dérivation une relation entre les f_i). Il existe donc des réels x_1, ..., x_n tels que la matrice $A = (F_i(x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ soit inversible, c'est l'objet du lemme que nous reportons à la fin de la démonstration. La relation $\forall i,j \; F_i(x_j + a) - F_i(x_j) = \sum_{k=1}^n \lambda_{ik}(a) F_k(x_j)$ s'écrit encore $B(a) = \Lambda(a) A$, où on a noté $B(a) = (F_i(x_j+a) - F_i(x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $\Lambda(a) = (\lambda_{ij}(a))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

On en déduit que $\Lambda(a) = B(a) A^{-1}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Les f_i étant continues, les F_i sont de classe $\mathcal{C}^1$ et donc aussi l'application $a \mapsto B(a)$. On en déduit que $a \mapsto \Lambda(a)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, autrement dit les λ_{ij} sont de classe $\mathcal{C}^1$. En prenant $x = 0$ dans $(*)$, on voit que $f_i(a) = \sum_{k=1}^n f_k(0) \lambda_{ik}(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, ce qui montre que f_i est de classe $\mathcal{C}^1$. Par une récurrence immédiate, les f_i sont en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$: on a $F \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

En dérivant la relation $(*)$ par rapport à a en 0, on voit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_i'(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_{ik}'(0) f_k(x)$, on en déduit que $f_i' \in F$, autrement dit $F \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est stable par l'endomorphisme D de dérivation. Soit μ le polynôme minimal de $D_{|F}$, on note d son degré. On a $F \subset \mathrm{Ker}\mu(D)$, mais d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, $\mathrm{Ker}\mu(D)$ est un sous-espace de E de dimension d, on doit donc avoir $d = n$ et $F = \mathrm{Ker}\mu(D)$.

Enfin, démontrons le lemme annoncé : soient h_1, ..., h_n des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ linéairement indépendantes. On note $K = \mathrm{Vect}(h_1, ..., h_n)$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note δ_x la forme linéaire $f \mapsto f(x)$. Soit $\Gamma = \{\delta_x, x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \mathrm{Vect}_{K^*}(\Gamma)$. On a ${}^{\perp_K}G = {}^{\perp_K}\Gamma = 0$, ce qui prouve que $G = K^*$: Γ engendre K^*. Il existe donc des réels x_1, ..., x_n tels que $(\delta_{x_1}, ..., \delta_{x_n})$ soit une base de K^*. La matrice $(h_i(x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est la matrice de passage de la base duale des h_i à la base des δ_{x_i}, d'où le résultat. $\square$

Leçons possibles
120 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications
(**123** Déterminant. Exemples et applications.)
132 Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.
201 Espaces de fonctions. Exemples et applications.
211 Utilisation de la dimension finie en analyse.
220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$; exemples d'études qualitatives des solutions.
221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.
228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.

Références
?