2 Dénombrement des partitions de $\{1, ..., n\}$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note D_n le nombre de partitions de $\{1, ..., n\}$, avec par convention $D_0 = 1$.

Une relation de récurrence

Pour obtenir une partition de $\{1, ..., n+1\}$, on peut commencer par choisir une partie contenant 1, qui a un certain nombre $k+1$ d'éléments (où $0 \leqslant k \leqslant n$), ce qui revient à choisir k éléments parmi $\{2, ..., n+1\}$; puis choisir une partition des $n-k$ éléments restants.

On en déduit que $D_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} D_{n-k}$, après une réindexation : $D_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} D_k$.

Une expression analytique de D_n

On considère la série entière $\sum_{n \geqslant 0} \frac{D_n}{n!} z^n$. Son rayon de convergence est $\geqslant 1$, car on montre par récurrence que $D_n \leqslant n!$:

- on a bien $D_0 = 1 \leqslant 0! = 1$,
- si $D_k \leqslant k!$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, on a par la relation de récurrence plus haut $D_{n+1} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} k! = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}$, d'où $D_{n+1} \leqslant \sum_{k=0}^{n} n! = (n+1)!$.

Il existe donc une fonction $z \mapsto f(z) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{D_n}{n!} z^n$ holomorphe sur le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$, que l'on note D.

Pour $z \in D$, on a $f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_{n+1}}{n!} z^n$, et en utilisant la relation de récurrence du paragraphe précédent $f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} D_k$, soit encore

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^n}{(n-k)!} \frac{D_k}{k!}.$$

On reconnaît le produit de CAUCHY des deux séries $e^z = \sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ et $f(z) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{D_k}{k!} z^k$. Ces deux séries ayant un rayon de convergence $\geqslant 1$, leur produit est bien défini dans D par la formule précédente, si bien que l'on a l'identité $f'(z) = e^z f(z)$ dans D.

On en déduit que la fonction holomorphe $z \mapsto e^{-e^z} f(z)$ est de dérivée nulle dans D, elle est donc constante égale à sa valeur en 0 qui est e^{-1}. On obtient donc la formule $\forall z \in D \ f(z) = e^{e^z - 1}$.

On développe une telle expression : $f(z) = e^{-1} \sum_{k \geqslant 0} \frac{e^{kz}}{k!} = e^{-1} \sum_{k \geqslant 0} \sum_{n \geqslant 0} \frac{(kz)^n}{k!n!}$. On peut intervertir deux sommes absolument convergentes, d'où l'égalité $f(z) = e^{-1} \sum_{n \geqslant 0} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!} \right) \frac{z^n}{n!}$. Par identification des coefficients, on obtient finalement $D_n = e^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$.

Leçons possibles
145 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.
230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.
231 Illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries numériques.
242 Exemples d'utilisation de fonctions définies par des séries.
243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.
244 Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications.

Références
?