3 L'espace $\mathrm{H}^1(I)$

Soit $I =]a,b[$ un intervalle ouvert borné non vide de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{D}(I)$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et à support compact dans I.

Si $u \in \mathrm{L}^2(I)$, nous conviendrons de dire que u est faiblement dérivable s'il existe une fonction $v \in \mathrm{L}^2(I)$ telle que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$, $\int_I v\varphi = -\int_I u\varphi'$ (autrement dit v est la dérivée de u au sens des distributions). Lorsqu'une telle fonction v existe, on admettra qu'elle est unique ; nous l'appellerons dérivée faible de u et on notera $v = u'$.

Ceci étant, on note $\mathrm{H}^1(I)$ l'espace des fonctions de $\mathrm{L}^2(I)$ faiblement dérivables au sens précédent.

Théorème. *L'espace* $\mathrm{H}^1(I)$ *jouit des propriétés suivantes :*
i) Muni de la norme définie par $\|u\|_{\mathrm{H}^1} = \sqrt{\|u\|_2 + \|u'\|_2}$, $\mathrm{H}^1(I)$ *est un espace de* Hilbert.
ii) $\mathrm{H}^1(I)$ *s'injecte canoniquement dans* $\mathcal{C}(\bar{I})$ *et dans* $\mathrm{L}^2(I)$*, et ces injections (dites de* Sobolev*) sont compactes.*

Preuve.
$\mathrm{H}^1(I)$ muni du produit scalaire $\langle u,v\rangle_{\mathrm{H}^1} = \int_I uv + \int_I u'v'$ est un espace préhilbertien. Montrons que c'est un espace complet : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathrm{H}^1(I)$. Alors les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n')_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy dans $\mathrm{L}^2(I)$, elles ont donc des limites respectives u et v dans $\mathrm{L}^2(I)$ (car $\mathrm{L}^2(I)$ est un espace complet). De plus, on a $v = u'$: soit $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, on a $\int_I v\varphi = \lim_{n\to+\infty} \int_I u_n'\varphi$ (grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz), soit $\int_I v\varphi = \lim_{n\to+\infty} -\int_I u_n\varphi'$, d'où $\int_I v\varphi = -\int_I u\varphi'$ (pour la même raison). u est donc élément de $\mathrm{H}^1(I)$, et on a immédiatement $u \overset{\mathrm{H}^1(I)}{=} \lim_{n\to+\infty} u_n$. Ceci prouve le point *i*).

Pour le point *ii*), on commence par montrer que tout élément de $\mathrm{H}^1(I)$ a un représentant dans $\mathcal{C}(\bar{I})$. Soit $u \in \mathrm{H}^1(I)$, on pose $\tilde{u}(x) = \int_a^x u'(t)\mathrm{d}t$. I étant borné, on a $u' \in \mathrm{L}^1(I)$, donc $\tilde{u}$ est bien défini et c'est une fonction continue sur $[a,b]$. De plus, on vérifie que $\tilde{u} \in \mathrm{H}^1(I)$ et $\tilde{u}' = u'$: soit $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, $\int_a^b u'(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \int_a^t u'(t)\varphi'(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$. Le théorème de Fubini s'applique sans problème, si bien qu'on peut écrire $\int_a^b u'(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \int_x^b u'(t)\varphi'(x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x$, soit encore $\int_a^b u'(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \int_a^b (\tilde{u}(b) - \tilde{u}(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x$ d'où on tire $\int_a^b u'(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = -\int_a^b \tilde{u}(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x$ (car φ est à support compact), ce qu'il fallait. u et $\tilde{u}$ ont même dérivée faible, il s'ensuit qu'il existe une constante C telle que $u \overset{\text{p.p.}}{=} \tilde{u} + C$ (nous admettrons ce point). Nous avons bien montré que u a un représentant continu sur $\bar{I}$, nous choisirons désormais toujours un tel représentant. On pourra noter que l'on a montré au passage que $u(x) - u(y) = \int_x^y u'(t)\mathrm{d}t$ pour tout $x, y \in I$.

Montrons maintenant que l'injection que nous venons de décrire de $\mathrm{H}^1(I)$ dans $\mathcal{C}(\bar{I})$ est compacte : soit $B = \{u \in \mathrm{H}^1(I), \|u\|_{\mathrm{H}^1} \leqslant 1\}$. Il s'agit de montrer que B est relativement compacte dans $\mathcal{C}(\bar{I})$. On utilise le théorème d'Ascoli :

– B est ponctuellement bornée : fixons $x \in [a,b]$, alors $\forall u \in B$, on écrit que $u(x) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b u(x)\mathrm{d}y$, soit $u(x) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b \left(\int_y^x u'(t)\mathrm{d}t - u(y)\right)\mathrm{d}y$, soit encore $u(x) = \dfrac{1}{b-a}\left(\displaystyle\int_a^b\int_y^x u'(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}y - \int_a^b u(y)\mathrm{d}y\right)$. On en déduit que $|u(x)| \leqslant \|u'\|_2 + \dfrac{1}{\sqrt{b-a}}\|u\|_2$, et finalement $|u(x)| \leqslant 1 + \frac{1}{\sqrt{b-a}}$.
– B est équicontinue : cela découle immédiatement du fait que $\forall x, y \in [a,b]$, $\forall u \in B$, $u(x) - u(y) = \displaystyle\int_y^x u'(t)\mathrm{d}t$, d'où $|u(x)-u(y)| \leqslant \sqrt{|x-y|}$.

Ceci prouve que B est une partie relativement compacte de $\mathcal{C}(\bar{I})$, et donc que l'injection $\mathrm{H}^1(I) \hookrightarrow \mathcal{C}(\bar{I})$ est compacte (en particulier elle est continue). Il s'ensuit immédiatement que l'injection $\mathrm{H}^1(I) \hookrightarrow \mathrm{L}^2(I)$ est également continue et compacte, puisque la topologie L^2 est moins fine que celle de la convergence uniforme.

$\square$

Proposition. *Soit $\mathrm{H}_0^1(I)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(I)$ dans $\mathrm{H}^1(I)$. On a les propriétés suivantes :*
i) $\mathrm{H}_0^1(I) = \{u \in \mathrm{H}^1(I), u(a) = u(b) = 0\}$.
ii) $\mathrm{H}^1(I) = \mathrm{H}_0^1(I) \oplus \mathbb{R}_1[X]$.
iii) $\mathcal{D}(\bar{I})$ *est dense dans* $\mathrm{H}^1(I)$.

Preuve.
Si u est limite dans $\mathrm{H}^1(I)$ de fonctions de $\mathcal{D}(I)$, alors u est limite dans $\mathcal{C}(\bar{I})$ des mêmes fonctions (grâce au théorème précédent), on en déduit que $u(a) = u(b) = 0$.

Réciproquement, soit $u \in \mathrm{H}^1(I)$ tel que $u(a) = u(b) = 0$. Par densité de $\mathcal{D}(I)$ dans $\mathrm{L}^2(I)$ (ce qu'on suppose connu), il existe une suite de fonctions $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(I)$ telle que $\psi_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u'$ dans $\mathrm{L}^2(I)$. Soit $\theta \in \mathcal{D}(I)$ telle que $\int_I \theta = 1$ et posons $\varphi_n = \psi_n - \left(\int_I \psi_n\right)\theta$. Alors $\varphi_n \in \mathcal{D}(I)$, $\int_I \varphi_n = 0$ et on a toujours $\varphi_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u'$. Pour le voir, on écrit que $\forall x \in I$, $|\varphi_n(x) - u'(x)| \leqslant |\psi_n(x) - u'(x)| + \left|\int_I \psi_n\right| |\theta(x)|$, il s'ensuit que $\|\varphi_n - u'\|_2 \leqslant \|\psi_n - u'\|_2 + |\int_I \psi_n| \|\theta\|_2$. Or $\|\psi_n - u'\|_2 \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par hypothèse et $\int_I \psi_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I u'$ (puisque $\psi_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u'$ dans $\mathrm{L}^2(I)$), avec $\int_I u' = u(b) - u(a) = 0$. On a donc bien $\varphi_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u'$. Enfin, on pose $\xi_n(x) = \int_a^x \varphi_n(t)\mathrm{d}t$. Comme $\varphi_n \in \mathcal{D}(I)$ et $\int_I \varphi_n = 0$, on a $\xi_n \in \mathcal{D}(I)$. De plus, $\|\xi_n - u\|_{\mathrm{H}^1} = \|\xi_n - u\|_2 + \|\varphi_n - u'\|_2$. Comme $u(a) = 0$, on a $u(x) = \int_a^x u'(t)\mathrm{d}t$, si bien que $\xi_n(x) - u(x) = \int_a^x (\varphi_n(t) - u'(t))\mathrm{d}t$, on en déduit que $\|xi_n - u\|_2 \leqslant (b-a)\|\varphi_n - u'\|_2$. Finalement, $\|\xi_n - u\|_{\mathrm{H}^1} \leqslant (b-a+1)\|\varphi_n - u'\|_2 \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et le point *i)* est montré.

Le point *ii)* se déduit sans problème du point *i)* (je laisse la preuve). Enfin, le point *iii)* est une conséquence immédiate de *ii)*.

$\square$

Proposition. *Soient u et v des éléments de $\mathrm{H}^1(I)$, alors $uv \in \mathrm{H}^1(I)$ (autrement dit $\mathrm{H}^1(I)$ est stable par multiplication). De plus, on a la formule $(uv)' = u'v + uv'$. La formule d'intégration par parties usuelle (dans $\mathcal{C}^1(I)$) est donc vraie dans $\mathrm{H}^1(I)$.*

Preuve.
Soient $u_n \in \mathcal{D}(\bar{I}) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u$ et $v_n \in \mathcal{D}(\bar{I}) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v$ dans $\mathrm{H}^1(I)$. Alors $u_n v_n \in \mathcal{D}(\bar{I}) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} uv$ dans $\mathcal{C}(\bar{I})$, et donc dans $\mathrm{L}^2(I)$. De plus, $(u_n v_n)' = u_n' v_n + u_n v_n' \in \mathcal{D}(\bar{I}) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u'v + uv'$ dans $\mathrm{L}^2(I)$, par continuité de la multiplication de $\mathcal{C}(\bar{I}) \times \mathrm{L}^2(I)$ dans $\mathrm{L}^2(I)$. On en déduit que les suites $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $((u_n v_n)')_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy dans $\mathrm{L}^2(I)$, donc que $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathrm{H}^1(I)$. La suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a donc une limite dans $\mathrm{H}^1(I)$. Cette limite ne peut être que uv, puisque $u_n v_n \in \mathcal{D}(\bar{I}) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} uv$ dans $\mathrm{L}^2(I)$ (et la topologie de $\mathrm{H}^1(I)$ est plus fine que celle de $\mathrm{L}^2(I)$). De même, on a nécessairement $(uv)' = u'v + uv'$ (puisque, par exemple, la dérivation est continue de $\mathrm{H}^1(I)$ dans $\mathrm{L}^2(I)$).

La formule d'intégration par parties s'en ensuit directement (rappelons $u \in \mathrm{H}^1(\bar{I})$, qu'on prend toujours continu, vérifie $u(x) - u(y) = \int_y^x u'(t)\mathrm{d}t$).

□

Voyons maintenant une application au « problème de Dirichlet pour le Laplacien » :

Proposition.
Étant donnée une fonction f continue sur $\bar{I}$, il existe une unique fonction u de classe (au moins) $\mathcal{C}^2$ sur $\bar{I}$ telle que $\begin{cases} -u'' + u = f \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$.

Preuve.
Supposons que u soit solution du problème. Alors pour toute fonction $v \in \mathrm{H}^1_0(I)$, on a $-\int_I u''v + \int_I uv = \int_I fv$. En utilisant la formule d'intégration par parties démontrée plus haut, cela se réécrit $\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv$ (sachant que $v(a) = v(b) = 0$). En notant L la forme linéaire continue sur $\mathrm{H}^1_0(I)$ définie par $v \mapsto \int_I fv$, on a donc $\langle u, v\rangle_{\mathrm{H}^1} = L(v)$ pour tout $v \in \mathrm{H}^1_0(I)$. Or $\mathrm{H}^1_0(I)$ est un sous-espace fermé de $\mathrm{H}^1(I)$, c'est donc un espace de Hilbert, et le théorème de représentation de Riesz nous dit qu'il existe un unique u dans $\mathrm{H}^1_0(I)$ vérifiant la propriété précédente.

On a donc montré l'unicité d'une solution au problème ; réciproquement, montrons que la solution « faible » donnée par le théorème de Riesz est une solution. Le fait que $-\int_I u''v = -\int_I uv + \int_I fv$ en particulier pour tout $v \in \mathcal{D}(I)$ montre que u est deux fois faiblement dérivable et $u'' = u + f$ (dans $\mathrm{L}^2(I)$). Or u et f étant continues, cette égalité montre que u' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\bar{I}$ (car $u'(x) = u'(a) + \int_a^x u''(t)\mathrm{d}t$) et par suite que u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\bar{I}$. u'' est donc la dérivée seconde usuelle de u, et u est solution forte du problème.

□

Leçons possibles
201 Espaces de fonctions. Exemples et applications.

205 Espaces complets. Exemples et applications.
207 Prolongement de fonctions. Applications.
((**208** Utilisation de la continuité uniforme en analyse.))
(**210** Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés. Exemples et applications.)
212 Méthodes hilbertiennes en dimension finie et infinie.
234 Espaces L^p.

Références
?