7 Théorème de Cartan-von Neumann

Théorème (Cartan-Von Neumann). *Tout sous-groupe fermé G de $GL_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de Lie.*

Preuve.
Il s'agit de montrer que G est localement $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphe à un espace euclidien. Plus précisément, il faut montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout point $g \in G$, il existe un ouvert U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, un voisinage ouvert V de g dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme $\varphi : U \to V$ tel que $\varphi(U \cap F) = V \cap G$.

Étape 1 : Il suffit de montrer cette propriété au voisinage de id_G $(= I_n)$.

Cela découle directement du fait que pour chaque $g \in G$, l'application $M \mapsto gM$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui envoie un voisinage de I_n dans G sur un voisinage de g dans G.

Étape 2 : Définition de « F ».

On pose $\mathcal{L} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}\ e^{tM} \in G\}$. Il nous faut montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il est clair que $0 \in \mathcal{L}$ et que $\mathcal{L}$ est stable par multiplication scalaire, il reste à voir que $\mathcal{L}$ est stable par addition.

On commence par montrer que si A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $e^{A+B} = \lim_{k\to+\infty} \left(e^{A/k}e^{B/k}\right)^k$.
Comme on le voit sur le développement en série de exp, on a $e^H = I_n + H + o(H)$, de sorte que $\exp'(0) = I_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. D'après le théorème d'inversion locale, exp induit un difféomorphisme d'un voisinage ouvert de 0 sur un voisinage ouvert de I_n (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). Notons L sa réciproque, on a $L(I_n + H) = H + o(H)$.
On écrit ensuite que pour k assez grand,

$$\left(e^{A/k}e^{B/k}\right)^k = \exp[L(e^{A/k}e^{B/k})]^k = \exp[kL(I_n + \frac{A+B}{k} + o(1/k))]$$

On en déduit que $\left(e^{A/k}e^{B/k}\right)^k = \exp[A + B + o(1)]$, d'où le résultat.

Si maintenant A et B sont éléments de $\mathcal{L}$, on écrit que $e^{t(A+B)} = \lim_{k\to+\infty} \left(e^{t/kA}e^{t/kB}\right)^k$. Par hypothèse, $e^{t/kA}$ et $e^{t/kB}$ sont éléments de G (pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$), et comme G est un sous-groupe fermé, on a $e^{t(A+B)} \in G$ par passage à la limite. Ceci prouve que $A + B \in \mathcal{L}$, finalement $\mathcal{L}$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Étape 3 : Définition de « φ ».

Soit N un supplémentaire de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{L} \oplus N \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ par $\varphi(L, M) = e^L e^M$. φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, de plus $\varphi(0) = I_n$ et $\varphi'(0) = I_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$,

φ induit donc un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme d'un voisinage U de 0 sur un voisinage V de I_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, il est clair que $\varphi(U \cap \mathcal{L}) \subset V \cap G$.

Il reste à montrer que si $\varphi(X) \in G$ avec $X = L + M \in U$, alors $X \in \mathcal{L}$. Nous allons voir juste après que quitte à restreindre U, $e^{U \cap N}$ ne rencontre G qu'en I_n. On écrit alors que $e^M = \varphi(X)e^{-L} \in G$, d'où on déduit que $M = 0$, *i.e.* $X \in \mathcal{L}$, et le théorème sera prouvé.

Enfin, on montre notre affirmation en suspens par l'absurde : supposons qu'il existe une suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices non nulles de N telle que $\lim_{k\to+\infty} M_k = 0$ et $e^{M_k} \in G$ pour tout k. On pose $\varepsilon_k = M_k/\|M_k\|$, alors $\varepsilon_k \in S \cap N$ (où S est la sphère unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour $\|.\|$), donc par compacité on peut supposer que $\varepsilon_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \varepsilon \in S \cap N$ (quitte à extraire une sous-suite). Nous allons montrer que $\varepsilon \in \mathcal{L}$, ce qui constituera la contradiction puisque $\mathcal{L} \cap N = \{0\}$. Soit $t \in \mathbb{R}$, on écrit $t/\|M_k\| = n_k + \mu_k$ avec $n_k \in \mathbb{Z}$ et $|\mu_k| \leqslant 1/2$. On a alors $e^{n_k M_k} = \left(e^{M_k}\right)^{n_k} \in G$ et $e^{n_k M_k} = e^{t\varepsilon_k}e^{-\mu_k M_k}$, on en déduit que $e^{n_k M_k} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} e^{t\varepsilon}$. Comme G est fermé, ceci prouve que $e^{t\varepsilon} \in G$, finalement $\varepsilon \in \mathcal{L}$.

$\square$

On peut remarquer que $\mathcal{L}$ est le plan tangent à G en I_n. En effet, si $X \in \mathcal{L}$, alors $t \mapsto e^{tX}$ est une courbe de G dont X est le vecteur tangent au point I_n. Ceci prouve que $\mathcal{L} \subset T_{I_n}G$, et on a en fait égalité pour des raisons de dimension.

Leçons possibles

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.
127 Exponentielle de matrices. Applications.
214 Applications du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites.
215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Références

gonnord tosel, ?