10 Théorème de Brouwer

Soit $n \in \mathbb{N}$, on note B la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ pour une norme quelconque.

Théorème (Brouwer). *Toute application continue $f : B \to B$ a un point fixe.*

Preuve.
On suppose désormais $n \geqslant 1$ (le résultat est trivial sinon). Comme « être continu $X \to X$ et avoir un point fixe » est une propriété invariante par homéomorphisme, on peut supposer que la norme considérée est la norme euclidienne usuelle. Au passage, nous venons de dire que le théorème se généralise à tout espace homéomorphe à B.

Nous allons raisonner par l'absurde : on suppose que f n'a pas de point fixe.

Étape 1 : on peut supposer f de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit $\alpha = \inf_B |f(x) - x|$. Par compacité de B, cette borne inférieure est atteinte, comme f n'a pas de point fixe, $\alpha > 0$.

On sait que l'on peut trouver une fonction g de classe C^1 sur (un voisinage de) B, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, telle que $\|f - g\|_{\infty,B} < \alpha/2$ (par exemple, grâce au théorème de Stone-Weierstrass).

Si on pose $h(x) = \frac{1}{1+\alpha/2} g(x)$, alors h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur B et h est à valeurs dans B. De plus, on vérifie que $\|h - f\|_\infty < \alpha$, il s'ensuit que h n'a pas de point fixe dans B. Quitte à remplacer f par h dans la suite de la démonstration, on peut supposer f de classe $\mathcal{C}^1$.

Étape 2 : Construction d'une rétraction par déformation de classe $\mathcal{C}^1$ de B sur S.

On a noté S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ ($S = \partial B$).

Pour $x \in B$, soit $r(x)$ le point d'intersection de S avec la demi-droite $[f(x), x)$. r est bien définie sur B.

De plus, on vérifie sans mal que r est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur B, toutes les applications intervenant dans la définition de r étant de classe $\mathcal{C}^1$. Par exemple, on écrit que $h(x) = f(x) + \lambda(x)(x - f(x))$, où $\lambda(x)$ est l'unique solution > 0 de l'équation du second degré en λ $|h(x)|^2 = 1$. On vérifie que les deux solutions réelles de cette équation sont de signes (strictement) contraires, si bien que le discriminant est > 0. Par la formule donnant les solutions d'une équation du second degré, on en déduit que λ est une application de classe $\mathcal{C}^1$.

On pose ensuite $F(x,t) = (1-t)x + tr(x)$ pour $t \in [0,1]$. Il est clair que F est une application de classe C^1 de $B \times [0,1]$ dans B. De plus, $F(.,0) = \mathrm{id}_B$, $F(.,1) = r$, et $F(x,t) = x$ pour tout $x \in S$ et pour tout $t \in [0,1]$.

Étape 3 : Constitution de la contradiction.

Soit $P(t) = \int_{\mathring{B}} \det \partial_x F(x,t) \mathrm{d}x$ pour $t \in [0,1]$. Il est clair que P est une fonction polynômiale de t.

Pour $t = 1$, la différentielle de $F(.,1) = r$ n'est inversible en aucun point de $\mathring{B}$, car en un tel point r n'est pas un homéomorphisme local sur son image (qui est d'intérieur vide, car $\subset S$). On en déduit que $P(1) = 0$.

Nous allons montrer que $P(t)$ est constant > 0 pour t suffisamment petit, ce qui constituera la contradiction (P serait alors un polynôme constant non nul, or $P(1) = 0$).

Pour cela, il nous suffit de montrer que $F(t,.)$ est un difféomorphisme positif (*i.e.* de jacobien partout > 0) de $\mathring{B}$ pour t suffisamment petit, car la formule de changement de variable donne alors $P(t) = \mathcal{V}(B) > 0$.

On applique le théorème d'inversion globale :
- $\partial_x F(t,x)$ est de déterminant > 0 pour $x \in \mathring{B}$ et t suffisamment petit : cela découle simplement du fait que $t \mapsto \partial_x F(t,x)$ est une application continue, et $\partial_x F(0,x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$.
- $F(t,.)$ est une application injective sur $\mathring{B}$ pour t suffisamment petit : soient x, $y \in \mathring{B}$ tels que $F(t,x) = F(t,y)$. On a donc $(1-t)(x-y) = t(r(x) - r(y))$. Notons $M = \sup_B \|r'\|$. L'inégalité de la moyenne donne $\|r(x) - r(y)\| \leqslant M\|x-y\|$, on en déduit que $(1-t)\|x-y\| \leqslant tM\|x-y\|$. Pour t suffisamment petit, cela n'est possible que si $x = y$.
- $F(t,\mathring{B}) = \mathring{B}$ pour t suffisamment petit : sachant que $F(t,S) = S$, on a $F(t,B) = F(t,\mathring{B}) \sqcup S$ (union disjointe). Or $F(t,B)$ est un compact et $F(t,\mathring{B})$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ pour t suffisamment petit (car $F(t,.)_{|\mathring{B}}$ est un difféomorphisme local). On en déduit que $F(t,\mathring{B})$ est ouvert et fermé dans $\mathring{B}$. Par connexité de $\mathring{B}$, $F(t,\mathring{B}) = \mathring{B}$.

$\square$

Leçons possibles
(**203** Utilisation de la notion de compacité.)
(**204** Connexité. Exemples et applications)
206 Utilisation de théorèmes de point fixe.
211 Utilisation de la dimension finie en analyse.
214 Applications du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites.

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.
((**248** Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynômiales ou polynômiales par morceaux. Exemples.))

Références
?