12 Théorème de Jordan

Théorème (Jordan). *Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ une courbe continue fermée et sans points doubles. Alors $C \setminus \Gamma$ a deux composantes connexes.*

Preuve.
Précisons d'emblée que cette preuve sera uniquement valable dans le cas où Γ est une courbe de classe $\mathcal{C}^1$. On peut alors la paramétrer par une application injective $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ dont la dérivée ne s'annule pas. Pour des raisons de confort, on peut supposer que γ est unitaire (*i.e.* $|\gamma'(t)| = 1$ pour tout $t \geqslant 0$) et que $\gamma(0) = 0$, $\gamma'(0) = 1$.

On montre dans un premier temps le lemme suivant : si pour $\varepsilon > 0$ on note Γ_ε^+ (resp. Γ_ε^-) la courbe paramétrée par $\gamma_\varepsilon^+(t) = \gamma(t) + i\varepsilon\gamma'(t)$ (resp. $\gamma_\varepsilon^-(t) = \gamma(t) - i\varepsilon\gamma'(t)$), alors pour ε suffisamment petit, disons $\varepsilon < \alpha$, Γ ne rencontre pas Γ_ε^+ (resp. Γ_ε^-).

Si s, t vérifient $\gamma(t) = \gamma_\varepsilon^+(s)$, alors $|\gamma(t) - (\gamma(s) + (t-s)\gamma'(s))| = |(i\varepsilon - (t-s))\gamma'(s)| = |i\varepsilon - (t-s)|$, d'où $|\gamma(t) - (\gamma(s) + (t-s)\gamma'(s))| > |t-s|$. Ceci est exclu pour $|t-s|$ suffisamment petit du fait que γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le compact $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Montrons-le : par uniforme continuité de γ' (en vertu du théorème de Heine), on peut choisir $\eta > 0$ pour que $|\gamma'(t) - \gamma'(s)| < 1$ dès que $|t-s| < \eta$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis entre s et t à la fonction $\theta \mapsto \gamma(\theta) - (\gamma(s) + (\theta - s)\gamma'(s))$, on obtient l'inégalité voulue.

On pose alors $\alpha = \inf_{|t-s| \geqslant \eta} |\gamma(t) - \gamma(s)|$. Cette borne inférieure est atteinte car $\{(t,s) \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2, |t-s| \geqslant \eta\}$ est compact et $(t,s) \mapsto \gamma(t) - \gamma(s)$ est une application continue, on en déduit que $\alpha > 0$ par injectivité de γ. Maintenant si $\varepsilon < \alpha$, alors soit $|t-s| < \eta$ et dans ce cas $\gamma(t) \neq \gamma_\varepsilon^+(s)$ par le point précédent, soit $|t-s| \geqslant \eta$ et dans ce cas $|\gamma(t) - \gamma_\varepsilon^+(s)| = |\gamma(t) - \gamma(s) - i\varepsilon\gamma'(s)| \geqslant ||\gamma(t) - \gamma(s)| - \varepsilon| \geqslant \alpha - \varepsilon > 0$. Ainsi Γ ne rencontre pas Γ_ε^+. Quitte à changer ε en $-\varepsilon$ jusqu'à la dernière ligne de notre argument, nous avons aussi montré que Γ ne rencontre pas Γ_ε^-, et le lemme est montré.

On fixe désormais $\varepsilon < \alpha$. Γ_ε^+ et Γ_ε^- sont donc deux parties connexes par arcs de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$; nous allons voir que tout point de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ peut-être relié à Γ_ε^+ ou à Γ_ε^- par un chemin continu dans $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ (un segment de droite en fait), on aura ainsi montré que $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ a au plus deux composantes connexes.

Soit donc $z \notin \Gamma$. La distance de z à Γ est atteinte en un point $\gamma(t_0)$ (par compacité de Γ) qui vérifie $(z - \gamma(t_0)) \perp \gamma'(t_0)$. En effet, t_0 minimise la fonction dérivable $t \mapsto |z - \gamma(t)|^2$, il suffit d'écrire que la dérivée en t_0 de cette fonction est nulle. On en déduit que la demi-droite $[\gamma(t_0), z)$ rencontre Γ_ε^+ au point $\gamma_\varepsilon^+(t_0)$, ou Γ_ε^- au point $\gamma_\varepsilon^-(t_0)$. Supposons par exemple que l'on est dans le premier cas et montrons que le segment $[\gamma_\varepsilon^+(t_0), z]$ ne rencontre pas Γ. Deux cas sont possibles :

- $\gamma(t_0)$, $\gamma_\varepsilon^+(t_0)$ et z sont alignés dans ce sens. Dans ce cas si $[\gamma_\varepsilon^+(t_0), z]$ rencontrait Γ cela contredirait la minimalité de $|z - \gamma(t)|$.
- $\gamma(t_0)$, z et $\gamma_\varepsilon^+(t_0)$ sont alignés dans ce sens. Dans ce cas si $[\gamma_\varepsilon^+(t_0), z]$ rencontrait Γ, ce point serait également sur un $\Gamma_{\varepsilon'}^+$ avec $\varepsilon' \leqslant \varepsilon$, ce qui contredirait le lemme.

Enfin, il reste à montrer que $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ a au moins deux composantes connexes. Pour cela il suffit de trouver deux points de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ qui n'ont pas le même indice par rapport à Γ. Pour ε suffisamment petit, $z_\varepsilon^+ = \gamma_\varepsilon^+(0) = i\varepsilon$ et $z_\varepsilon^- = \gamma_\varepsilon^-(0) = -i\varepsilon$ conviennent. Montrons-le :

$$\mathrm{I}(\Gamma, z_\varepsilon^+) - \mathrm{I}(\Gamma, z_\varepsilon^-) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{1}{\gamma(t) - z_\varepsilon^+} - \frac{1}{\gamma(t) - z_\varepsilon^-} \right) \gamma'(t)\mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\gamma'(t)\mathrm{d}t}{\gamma(t)^2 + \varepsilon^2}$$

On voudrait faire tendre ε vers 0 dans l'intégrale mais il faut prendre des précautions : le dénominateur s'annule en $t = 0$, $\varepsilon = 0$ (et seulement en ce point). Écrivons que $\lim_{t \to 0} \frac{\gamma(t)}{t} = \gamma'(0) = 1$ donc pour t suffisamment petit, disons $|t| \leqslant \delta$, on a $\left| \frac{\gamma(t)^2}{t^2} - 1 \right| \leqslant \frac{1}{2}$. On coupe l'intégrale en deux :

$$I(\Gamma, z_\varepsilon^+) - I(\Gamma, z_\varepsilon^-) = \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{\delta < |t| < 1/2} \frac{\gamma'(t)\mathrm{d}t}{\gamma(t)^2 + \varepsilon^2} + \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\gamma'(t)\mathrm{d}t}{\gamma(t)^2 + \varepsilon^2}$$

La fonction $(\varepsilon, t) \mapsto \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)^2 + \varepsilon^2}$ est continue sur le compact $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \times ([-1/2, -\delta] \cup [\delta, 1/2])$ (où on aura fixé $\varepsilon_0 < \alpha$), elle y est donc dominée par une constante indépendante de ε et t. On en déduit que $\left| \int_{\delta < |t| < 1/2} \frac{\gamma'(t)\mathrm{d}t}{\gamma(t)^2 + \varepsilon^2} \right|$ est majoré par une constante indépendante de ε, d'où

$$\frac{\varepsilon}{\pi} \int_{\delta < |t| < 1/2} \frac{\gamma'(t)\mathrm{d}t}{\gamma(t)^2 + \varepsilon^2} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$$

D'autre part, en faisant le changement de variable $t = \varepsilon u$, il vient

$$\frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\gamma'(t)\mathrm{d}t}{\gamma(t)^2 + \varepsilon^2} = \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\delta/\varepsilon}^{\delta/\varepsilon} \frac{\varepsilon \gamma'(\varepsilon u)\mathrm{d}u}{\varepsilon^2 + \gamma(\varepsilon u)^2} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\gamma'(\varepsilon u)}{1 + u^2 \frac{\gamma(\varepsilon u)^2}{(\varepsilon u)^2}} \mathbf{1}_{[-\delta/\varepsilon, \delta/\varepsilon]} \mathrm{d}u$$

δ a été choisi de sorte que $\left| \frac{\gamma'(\varepsilon u)}{1 + u^2 \frac{\gamma(\varepsilon u)^2}{(\varepsilon u)^2}} \mathbf{1}_{[-\delta/\varepsilon, \delta/\varepsilon]} \right| \leqslant \frac{1}{1 + \frac{u^2}{2}}$ pour tout $\varepsilon > 0$ (et pour tout $u \in \mathbb{R}$), on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue :

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\gamma'(\varepsilon u)}{1 + u^2 \frac{\gamma(\varepsilon u)^2}{(\varepsilon u)^2}} \mathbf{1}_{[-\delta/\varepsilon, \delta/\varepsilon]} \mathrm{d}u \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^2} = 1$$

Finalement, on a montré que $\lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{I}(\Gamma, z_\varepsilon^+) - \mathrm{I}(\Gamma, z_\varepsilon^-) = 1$, donc (au moins) pour ε assez petit $\mathrm{I}(\Gamma, z_\varepsilon^+) \neq \mathrm{I}(\Gamma, z_\varepsilon^-)$, ce qui termine la démonstration.

Remarque : Il est clair qu'une seule des deux composantes connexes de $C \setminus \Gamma$ est non bornée, on l'appelle *extérieur* de Γ, et on appelle *intérieur* de Γ l'autre composante connexe. $\square$

Leçons possibles

203 Utilisation de la notion de compacité.

204 Connexité. Exemples et applications.
216 Étude de courbes. Exemples.
244 Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications.
245 Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$.

Références
[Pel].
gonnord tosel cdiff