17 Méthode de Newton

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que x^* un zéro de f tel que f est deux fois dérivable sur un voisinage de x^*, f'' est bornée (sur ce voisinage) et $f'(x^*) \neq 0$.

Théorème. *Pour x_0 suffisamment proche de x^*, la suite définie par $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ converge quadratiquement vers x^*.*

On montrera en particulier qu'une telle suite est bien définie.

Preuve.
Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que $f'(x^*) > 0$. Ainsi (par continuité) $f' > 0$ sur un voisinage $J = [x^* - \alpha, x^* + \alpha]$ de x^*.

Posons $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ pour $x \in J$. $\forall x \in J$, $\varphi(x) - \varphi(x^*) = x - x^* - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ soit $\varphi(x) - \varphi(x^*) = \dfrac{f(x^*) - f(x) - (x^* - x)f'(x)}{f'(x)}$. D'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe $c \in]x, x^*[$ (ou $]x^*, x[$) tel que $\varphi(x) - \varphi(x^*) = \dfrac{f''(c)(x - x^*)^2}{2f'(x)}$. Il existe donc une constante $M > 0$ telle que $|\varphi(x) - \varphi(x^*)| \leqslant M(x - x^*)^2$ pour tout $x \in J$.

Montrons maintenant que quitte à restreindre, l'intervalle J est stable par φ. On déduit de l'inégalité précédente que $|\varphi(x) - x^*| \leqslant M\alpha^2$, d'où $|\varphi(x) - x^*| < \alpha$ pourvu que l'on ait choisi α assez petit pour que $\alpha M < 1$. Ainsi la suite (x_n) est bien définie.

De plus, on a $\forall n \geqslant 0$ $|x_{n+1} - x^*| = |\varphi(x_n) - \varphi(x^*)|$ d'où $|x_{n+1} - x^*| \leqslant M|x_n - x^*|^2$. Ceci se réécrit $M|x_{n+1} - x^*| \leqslant (M|x_n - x^*|)^2$; on en déduit par une récurrence immédiate que $M|x_n - x^*| \leqslant \rho^{2^n}$ où $\rho = M|x_0 - x^*| < 1$. Ceci prouve que la convergence est quadratique.

□

Proposition. *Sous les hypothèses précédentes, si f est deux fois dérivable sur I et convexe sur I, alors toute condition initiale $\geqslant x^*$ convient.*

Preuve.
φ est désormais définie sur I. Montrons que φ laisse $[x^*, \sup I[$ invariant. Par convexité, on a $f'' \geqslant 0$ sur I. Comme f' est croissante, on a $f'(x) > 0$ pour tout $x > x^*$ et $f(x) > 0$ pour tout $x > x^*$. On en déduit que $\varphi(x) < x$ pour tout $x > x^*$. D'autre part, on a toujours $\varphi(x) - x^* = \dfrac{f''(c)(x - x^*)^2}{2f'(x)}$ d'où $\varphi(x) \geqslant x^*$(ce qui est clair géométriquement par convexité de f).

La suite (x_n) est donc bien définie dès que $x_0 \geqslant x^*$. De plus, nous avons montré que la suite est décroissante (même strictement si $x_0 \neq x^*$. (x_n) a donc une limite $l \geqslant x^*$ vérifiant $\varphi(l) = l$, nécessairement $l = x^*$. De plus, la convergence est toujours quadratique car la preuve précédente s'applique sans modification.

□

Leçons possibles
(**118** Racines des polynômes à une indéterminée. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme. Exemples et applications.)
218 Applications des formules de Taylor.
223 Convergence des suites numériques. Exemples et applications.
229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.
232 Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.
(**206** Utilisation de théorèmes de point fixe.)
224 Comportement asymptotique des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.
226 Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.

Références
[Rou03]