18 Lemme de MORSE

THÉORÈME (Lemme de Morse). *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 1$) et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$, avec $k \geqslant 3$.*

Si a est un point critique non dégénéré de f (i.e. $f'(a) = 0$ et $f''(a)$ est une forme quadratique non dégénérée), alors il existe un changement de coordonnées locales $x \mapsto u$ de classe $\mathcal{C}^{k-2}$ au voisinage de a tel que $f(x) = f(a)+u_1^2+\ldots+u_p^2-u_{p+1}^2-\ldots-u_n^2$, où $(p, n-p)$ est la signature de $f''(a)$.

On commence par montrer le lemme suivant :

Lemme. *Soit $S_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique inversible. Alors il existe un voisinage U de S_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme $\alpha : U \to V \subset GL_n(\mathbb{R})$ envoyant S_0 sur I_n tel que $\forall S \in U$, $S = {}^t\alpha(S)S_0\alpha(S)$.*

Preuve du lemme.
Soit $\beta : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto {}^tMS_0M$. Alors β est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (car polynômiale), et $\beta'(I_n)$ est l'application linéaire $H \mapsto {}^tHS_0+S_0H$ (soit on l'écrit, soit on connaît la différentielle d'une application bilinéaire). $\beta'(I_n)$ est donc surjective : si $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors $H = \frac{1}{2}S_0^{-1}S$ est envoyé sur S par $\beta'(I_n)$. Soit F le sous-espace des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $S_0M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On a $I_n \in F$ et on voit immédiatement que ${\beta_{|F}}'(I_n) = \beta'(I_n)_{|F}$ est injective et surjective. D'après le théorème d'inversion locale, $\beta_{|F}$ induit un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme d'un voisinage V de I_n dans F sur un voisinage U de S_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Quitte à restreindre, on peut supposer $V \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Il suffit de prendre pour α le difféomorphisme réciproque.

$\square$

Passons maintenant à la démonstration du théorème :

Preuve du théorème.
Quitte à poser $g(x) = f(x-a) - f(a)$, on peut supposer que $a = 0$ et $f(a) = 0$.

La formule de TAYLOR avec reste intégral à l'ordre 1 donne $f(x) = {}^txS(x)x$, où $S(x)$ est la matrice symétrique $\int_0^1 (1-t)f''(tx)\mathrm{d}t$ (fonction de classe $\mathcal{C}^{k-2}$ de x.

D'après le lemme précédent, pour x assez proche de 0 (de sorte que $Q(x)$ reste dans un voisinage de $Q(0)$ dans $S_n(\mathbb{R})$), on a $Q(x) = {}^t\alpha(Q(x))Q(0)\alpha(Q(x))$. Or $Q(0) = \frac{1}{2}f''(0)$ est de signature $(p, n-p)$, il existe donc une matrice inversible P telle que $Q(0) = {}^tPI_{p,n-p}P$.

Finalement, on a bien $f(x) = u_1^2 + \ldots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \ldots - u_n^2$, où $u = P\alpha(Q(x))x = \varphi(x)$, pour x assez proche de 0. De plus, φ est de classe $\mathcal{C}^{k-2}$ et $\varphi'(0) = P$ est inversible, on en déduit que φ est un $\mathcal{C}^{k-2}$-difféomorphisme. $\square$

On peut remarquer que cette forme réduite montre que les points critiques dégénérés sont isolés (f n'a pas d'autre point critique au voisinage de a).

On peut appliquer le lemme de MORSE à l'étude de la position d'une surface par rapport à son plan tangent. Pour simplifier, on se place dans le cas où le plan est « horizontal » en dimension 2.

Proposition. *Soit Σ une nappe paramétrée $z = f(x, y)$, où f est une fonction de classe (au moins) $\mathcal{C}^3$. Soit (x_0, y_0) un point critique non dégénéré de f. Soit Π le plan tangent à Σ au point (x_0, y_0) (d'équation $z = z_0$).*
- *Si $f''(a)$ est de signature $(2, 0)$, alors Σ est au dessus de Π au voisinage de a.*
- *Si $f''(a)$ est de signature $(0, 2)$, alors Σ est en dessous de Π au voisinage de a.*
- *Si $f''(a)$ est de signature $(1, 1)$, alors Σ traverse Π selon deux courbes qui se coupent en a.*

Preuve.
Les deux premiers points sont une conséquence directe de l'écriture réduite de f.

Dans le troisième cas, on écrit que $f(x, y) = f(x_0, y_0) + u^2 - v^2$, on a donc $f(x, y) = z_0 \Leftrightarrow u^2 - v^2 = 0$. La courbe de niveau de f se décompose donc en deux courbes C^+, C^- définies implicitement par $u + v = 0$ et $u - v = 0$. La différentielle $\mathrm{D}(u + v) = (\partial_x u, +\partial_x v, \partial_y u, +\partial_y v)$ ne peut pas s'annuler, sinon $\varphi' = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}$ ne serait pas inversible. On en déduit que C^+ est une « vraie » courbe (sous-variété $\mathcal{C}^1$ du plan). Il en est de même pour C^-. □

Leçons possibles
131 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.
214 Applications du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites.
215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.
((**216** Étude de courbes. Exemples.))
217 Étude locale de surfaces. Exemples.
218 Applications des formules de Taylor.
(**219** Problèmes d'extremums.)

Références
[Rou03] pp.321 et suivantes, 341 et suivantes.