19 Intégrale de Fresnel

L'objectif est de calculer la valeur de l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{it}\mathrm{d}t$ pour α fixé dans $]0,1[$, on pourra en particulier en déduire la valeur de l'intégrale de Fresnel $I = \int_0^{+\infty} e^{ix^2}\mathrm{d}x$.

On commence par définir $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}e^{ixt}t^{\alpha-1}\mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}$ (on reconnaît la transformée de Fourier de la « densité Γ »).

On montre que φ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ en utilisant le théorème de dérivation des intégrales à paramètre :

- Pour tout $x \geqslant 0$, $t \mapsto e^{-t}e^{ixt}t^{\alpha-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car elle est continue (donc mesurable) et son module $t \mapsto e^{-t}t^{\alpha-1}$ est intégrable au voisinage de 0 et de $+\infty$ (respectivement par comparaison à une intégrale de Riemann et par croissances comparées).
- Pour tout $t \in]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto e^{-t}e^{ixt}t^{\alpha-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée $x \mapsto ie^{-t}e^{ixt}t^{\alpha}$ est de module $e^{-t}t^{\alpha}$ qui est une fonction de t indépendante de x et intégrable sur $]0,+\infty[$.

On a de plus $\forall x \geqslant 0$ $\varphi'(x) = i\int_0^{+\infty} e^{-t}e^{ixt}t^{\alpha}\mathrm{d}t$.

On effectue ensuite une intégration par parties sur $]0,+\infty[$, qui est autorisée ici car les fonctions utilisées sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et les deux termes du membre de droite de l'égalité suivante sont convergents :

$$\varphi'(x) = i\left\{\left[\frac{e^{(ix-1)t}}{ix-1}t^{\alpha}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{e^{(ix-1)t}}{ix-1}(\alpha t^{\alpha-1})\mathrm{d}t\right\}$$

Ce qui s'écrit encore $\varphi'(x) = \dfrac{-\alpha}{x+i}\varphi(x) = \dfrac{-\alpha(x-i)}{x^2+1}\varphi(x)$. Cette équation différentielle s'intègre de manière classique :

$$\varphi(x) = \varphi(0)e^{\alpha\int_0^x \frac{t\mathrm{d}t}{t^2+1} + i\alpha\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}}$$

Or on voit que $\varphi(0) = \Gamma(\alpha)$, et on connaît des primitives de $t \mapsto \dfrac{t}{t^2+1}$ et $t \mapsto \dfrac{t}{t^2+1}$ (respectivement $t \mapsto \dfrac{\log(t^2+1)}{2}$ et $t \mapsto \arctan t$), de sorte qu'on trouve l'expression suivante pour φ :

$$\varphi(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{(1+x^2)^{-\alpha/2}}e^{i\alpha\arctan t}$$

Afin de retrouver l'intégrale J, on fait le changement de variable $u = xt$ pour $x > 0$ dans l'expression initiale de φ : $\forall x > 0$ $\varphi(x) = x^{-\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-u/x}e^{iu}u^{\alpha-1}\mathrm{d}u$. Lorsque

$x \to +\infty$, $e^{-u/x} \to 1$ (pour tout $u > 0$), et nous allons montrer dans la suite que l'on peut intervertir la limite et l'intégrale, de sorte que $J = \lim_{x\to+\infty} x^\alpha \varphi(x)$. En utilisant l'expression trouvée pour φ, on en déduit que $J = \Gamma(\alpha)e^{i\alpha\pi/2}$.

Enfin, avant de démontrer notre assertion en suspens, voyons comment on dérive facilement de J la valeur de l'intégrale de Fresnel : on effectue le changement de variable $t = x^2$ (qui est un difféomorphisme $]0, +\infty[\to]0, +\infty[$) et on prend $\alpha = 1/2$, il vient $J_{\alpha=1/2} = 2I$, d'où $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{i\pi/4}$ (on a supposé connu que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$).

Il nous reste donc a montrer que $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \varphi(x) = J$, ce qui revient à dire que l'application $K : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ définie par $K(y) = \int_0^{+\infty} e^{-uy}e^{iu}u^{\alpha-1}\mathrm{d}u$ pour $y > 0$ et par $K(0) = J$, est continue en 0. Les théorèmes classiques d'interversion de limite et d'intégrale ne s'appliquant pas tels quels, il faut travailler un peu. Nous allons montrer que K est continue en tant que limite uniforme des fonctions continues $K_n : y \geqslant 0 \mapsto \int_0^n e^{-uy}e^{iu}u^{\alpha-1}\mathrm{d}u$.

Le fait que K_n soit continue se déduit du théorème relatif aux intégrales à paramètre (qui ne pose aucune difficulté ici puisqu'on intègre sur un compact), et l'existence de $K(0) = J$ (en tant qu'intégrale semi-convergente) se voit immédiatement après une intégration par parties.

On écrit que $|K_n(y) - K(y)| \leqslant |\int_n^{+\infty} e^{-uy}e^{iu}u^{\alpha-1}\mathrm{d}u|$, inégalité valable pour $y > 0$ et pour $y = 0$. Par intégration par parties partie et majoration de e^{-uy} et $\left|\frac{1}{-y+i}\right|$ par 1, il vient $\int_n^{+\infty} e^{-uy}e^{iu}u^{\alpha-1}\mathrm{d}u = \frac{1}{-y+i}\left\{\left[e^{(-y+i)u}u^{\alpha-1}\right]_n^{+\infty} + (\alpha-1)\int_n^{+\infty} e^{(-y+i)u}u^{\alpha-2}\mathrm{d}u\right\}$ d'où $|K_n(y) - K(y)| \leqslant n^{\alpha-1} + (\alpha-1)\int_n^{+\infty} u^{\alpha-2}\mathrm{d}u$. On a affaire au reste d'une intégrale convergente (car $\alpha - 2 < -2$), d'où la convergence vers 0 (et indépendante de y). K est donc, comme nous l'avons annoncé, limite uniforme des K_n ; ceci boucle notre preuve.

Leçons possibles

235 Interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples et applications.
236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.
237 Problèmes de convergence et de divergence d'une intégrale sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
240 Transformation de Fourier, produit de convolution. Applications.

Références

[Gou94] p165 ex 4.2.