20 Calcul d'une intégrale

Le but est de calculer la valeur exacte de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\log(1+2\cos x)}{\cos x}\mathrm{d}x$.

On commence par introduire la fonction $a > -1 \mapsto F(a) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\mathrm{d}x$. Justifions que F est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$ (ce qui montre au passage que I est bien définie) :

- Pour tout $a > -1$, $x \mapsto \dfrac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}$ est une fonction continue donc mesurable sur $[0,\pi/2[$, de plus elle se prolonge continûment en $\pi/2$ (par la valeur a), elle est donc intégrable sur $[0,\pi/2[$.
- Pour tout $x \in [0,\pi/2[$, $a \mapsto \dfrac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$, et $\dfrac{\partial}{\partial a}\dfrac{(\log(1+a\cos x))}{\cos x} = \dfrac{1}{1+a\cos x}$.
- Si $\alpha > -1$ est fixé, alors pour tout $a \geqslant \alpha$, $x \mapsto \dfrac{1}{1+a\cos x}$ est une fonction mesurable (car continue) sur $[0,\pi/2[$ et dominée par la constante (intégrable) $\dfrac{1}{1-\alpha}$.

Le théorème de dérivabilité relatif aux intégrales à paramètre nous permet d'affirmer que F est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$, de plus $\forall a > -1$ $F'(a) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+a\cos x}$.

En faisant le changement de variable $u = \tan x/2$, qui est un difféomorphisme de $[0,\pi/2[$ sur $[0,1[$, on a $\mathrm{d}x = \dfrac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}$ et $\cos x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$; il vient $F'(a) = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{(1+a)+(1-a)u^2}$. On distingue ensuite selon que $-1 < a < 1$ ou $a > 1$:

Si $-1 < a < 1$, on pose $a = \cos 2\theta$ avec $\theta \in]0,\pi/2[$. On a alors $1+a = 2\cos^2\theta$ et $1-a = 2\sin^2\theta$, si bien que $F'(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\cos^2\theta + u^2\sin^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2\tan^2\theta}$. En faisant le changement de variable affine $v = u\tan\theta$, on trouve $F'(a) = \dfrac{2}{\sin 2\theta}\displaystyle\int_0^{\tan\theta} \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} = \frac{2\theta}{\sin 2\theta}$. Comme $2\theta \in]0,\pi[$, on a $2\theta = \mathrm{arccos} a$ et $\sin 2\theta = \sqrt{1-a^2}$, d'où finalement $F'(a) = \dfrac{\mathrm{arccos} a}{\sqrt{1-a^2}}$.

Si $a > 1$, on pose $a = \mathrm{ch} 2\theta$ avec $\theta > 0$. On a cette fois $1+a = 2\mathrm{ch}^2\theta$ et $1-a = -2\mathrm{sh}^2\theta$, si bien que $F'(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{ch}^2\theta - u^2\mathrm{sh}^2\theta} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2\theta}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2\mathrm{th}^2\theta}$. En faisant le changement de variable affine $v = u\mathrm{th}\theta$, il vient $F'(a) = \displaystyle\frac{2}{\mathrm{sh}2\theta}\int_0^{\mathrm{th}\theta}\frac{\mathrm{d}v}{1-v^2} = \frac{2\theta}{\mathrm{sh}2\theta}$ (car $\displaystyle\frac{\mathrm{d}v}{1-v^2} = \mathrm{d}(\mathrm{th}v)$). Comme $2\theta > 0$, on a $2\theta = \mathrm{argch}a$ et $\mathrm{sh}2\theta = \sqrt{1+a^2}$, d'où finalement $F'(a) = \displaystyle\frac{\mathrm{argch}a}{\sqrt{1+a^2}}$.

On écrit ensuite que pour $-1 < a < 1$, on a $F(a) = F(0) + \int_0^a F'(t)\mathrm{d}t$, soit $F(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{arccos}t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$. Comme $\mathrm{d}(\mathrm{arccos}t) = \displaystyle\frac{-\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$, il vient $F(a) = \displaystyle\left[\frac{-\mathrm{arccos}^2 t}{2}\right]_0^a$ soit $F(a) = \displaystyle\frac{\pi^2}{8} - \frac{\mathrm{arccos}^2 a}{2}$. Par continuité de F en 1, on a au passage $F(1) = \displaystyle\frac{\pi^2}{8}$.

Enfin, on écrit que pour $a > 1$, $F(a) = F(1) + \displaystyle\int_0^a F'(t)\mathrm{d}t$ soit $F(a) = \displaystyle\frac{\pi^2}{8} + \int_0^a \frac{\mathrm{argch}t}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t$. Étant donné que $\mathrm{d}(\mathrm{argch}t) = \displaystyle\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}$, il vient $F(a) = \displaystyle\frac{\pi^2}{8} + \left[\frac{\mathrm{argch}^2 t}{2}\right]_1^a$, finalement $F(a) = \displaystyle\frac{\pi^2}{8} + \frac{\mathrm{argch}^2 a}{2}$.

En particulier, $I = F(2) = \displaystyle\frac{\pi^2}{8} + \frac{\mathrm{argch}^2 2}{2}$. On peut se souvenir de l'identité $\mathrm{argch}x = \log(x + \sqrt{x^2-1})$ pour tout $x \geqslant 0$, ce qui donne $I = \displaystyle\frac{\pi^2}{8} + \frac{\log(2+\sqrt{3})^2}{2}$.

Leçons possibles

228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.
233 Intégration des fonctions d'une variable réelle. Suites de fonctions intégrables.
236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.
(**237** Problèmes de convergence et de divergence d'une intégrale sur un intervalle de $\mathbb{R}$.)
239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Références

[Gou94] Problème 4 p.175.