26 Continuité des fonctions convexes

Théorème. *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction convexe où Ω est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 1$). Alors f est continue sur Ω, elle est même lipschitzienne sur les compacts de Ω.*

Preuve.
On commence par deux lemmes.

Lemme 1. Sous les hypothèses précédentes, si f est bornée sur Ω alors elle est lipschitzienne sur les compacts de Ω.

En effet, soit K un compact de Ω, alors $\exists \eta > 0$ tel que $K + 2B(0,\eta) \subset \Omega$ (on a choisi une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$). Soient x, $y \in K$, alors $z = x + \eta \dfrac{x-y}{\|x-y\|}$ est dans Ω et $x = \theta z + (1-\theta)y$, avec $\theta = \dfrac{\|x-y\|}{\|x-y\|+\eta}$. On en déduit que $f(x) \leqslant \theta f(z) + (1-\theta) f(y)$, d'où $f(x) - f(y) \leqslant \theta(f(z) - f(y))$ puis $f(x) - f(y) \leqslant \dfrac{2M}{\eta}\|x-y\|$, où $M = \sup_\Omega f$. x et y jouant des rôles symétriques, on a la même inégalité sur $f(y) - f(x)$. Ceci prouve que f est $\dfrac{2M}{\eta}$-lipschitzienne sur K.

Lemme 2. Toujours sous les hypothèses du théorème, f est minorée par une fonction affine.

On rappelle que l'épigraphe de f est $\mathrm{Epi}(f) = \{(x,r) \in \Omega \times \mathbb{R},\ f(x) \geqslant r\}$. Soit maintenant $(x_0, r) \in \Omega \times \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) < r$. Il est clair que $(x_0, r) \notin \overline{\mathrm{Epi}(f)}$, qui est un convexe fermé de $\mathbb{R}^{n+1}$. Par le théorème de projection sur un convexe fermé (ou par le théorème de Hahn-Banach géométrique), il existe un hyperplan de $\mathbb{R}^{n+1}$ qui sépare (même strictement) (x_0, r) et $\overline{\mathrm{Epi}(f)}$; ainsi $\mathrm{Epi}(f)$ est au-dessus d'un hyperplan (il ne peut pas être en dessous). En particulier le graphe de f est au-dessus d'un hyperplan, qui est le graphe d'une fonction affine, d'où le résultat.

Passons maintenant à la preuve du théorème. Soit $x \in \Omega$, on peut trouver un simplexe $\Delta \subset \Omega$ qui est un voisinage de x. Comme Δ est compact et f est minorée par une fonction affine, f est minorée sur Δ. D'autre part, tout point de Δ est barycentre des sommets s_1, ..., s_{n+1} de Δ. On en déduit que $f(x) \leqslant \max_i f(s_i)$ pour tout $x \in \Delta$ par convexité de f, f est donc majorée sur Δ. Finalement f est bornée sur Δ, et on peut appliquer le premier lemme : f est lipschitzienne sur les compacts de $\mathring{\Delta}$. En particulier, f est continue au point x. On a ainsi montré que f est continue sur Ω.

Enfin, soit K un compact de Ω, alors on peut trouver un compact $K' \subset \Omega$ tel que $K \subset \mathring{K'}$. f est continue donc bornée sur K', on peut donc appliquer de nouveau le lemme 1, qui montre que f est lipschitzienne sur K.

□

Leçons possibles
203 Utilisation de la notion de compacité.
211 Utilisation de la dimension finie en analyse.
229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.
252 Parties convexes, fonctions convexes (d'une ou plusieurs variables). Applications.

Références