Algèbre 02 – Groupes opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Soit G un groupe d'élément neutre e et soit X un ensemble non vide.

1. Généralités et exemples

Définition. Une *action (à gauche)* de G sur X est la donnée d'une application $G \times X \to X, (g,x) \mapsto gx$ vérifiant

(*i*) $g(hx) = (gh)x$ pour tous $g, h \in G$ et tout $x \in X$

(*ii*) $ex = x$ pour tout $x \in X$

Cela revient à considérer un homomorphisme de groupes $\varphi : G \to S(X), g \mapsto \varphi(g)$.
On définit de façon analogue une action à droite

Exemple. G agit sur lui-même par translation à droite, à gauche et par conjugaison.

Exemple. Si H est un sous-groupe de G alors G agit par la gauche sur les classes à gauche modulo H.

Exemple. S_n agit sur $\{1, \ldots, n\}$ par permutations.

Exemple. $GL_n(\mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{R}^n$ et, pour $r \leq n$, agit sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension r.

Objets attachés à une action. On définit la relation d'équivalence suivante sur X :

$$x \sim y \iff \exists g \in G \ / \ y = gx.$$

- L'*orbite* de x est l'ensemble $Gx = \{gx; g \in G\}$ et $X/G = X/\sim$ est l'*espace des orbites.*
- Une *transversale* est un système de représentants de chaque orbite.
- Le *stabilisateur* de $x \in X$ est le sous-groupe $\mathrm{Stab}(x) = \{g \in G; gx = x\}$ de G ; si $y = gx$ alors $\mathrm{Stab}(y) = g\,\mathrm{Stab}(x)\, g^{-1}$.
- Pour tout $g \in G$, on note $\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X; gx = x\}$.

Définition. On dit que l'action est (*simplement*) *transitive* si pour tous $x, y \in G$, il existe $g \in G$ (unique) tel que $y = gx$; il n'y a alors qu'une seule orbite.

Définition. On dit que l'action est *fidèle* si le seul $g \in G$ tel que $gx = x$ pour tout $x \in X$ est $g = e$.

Exemple. L'action de G sur lui-même par translation à gauche est simplement transitive.

Exemple. Si $H \leq G$ alors G agit transitivement sur les classes à gauche modulo H et, pour tout $g \in G$, on a $\mathrm{Stab}(gH) = gHg^{-1}$. De plus, si φ est le morphisme associé à l'action alors $\ker\varphi = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$.

Application (théorème de Frobenius)**.** Soit H un sous-groupe de G dont l'indice est le plus petit diviseur premier de $|G|$ alors H est distingué dans G.

Remarque. $G/\ker\varphi$ agit fidèlement sur X ; par exemple, si E est un espace vectoriel alors $PGL(E)$ agit fidèlement sur les droites.

Remarque. G agit transitivement sur les orbites. Par exemple, $\mathcal{O}(n)$ agit transitivemnt les sphères centrées de $\mathbb{R}^n$ centrées en 0.

Remarque. Pour tout $x \in X$, on a une bijection

$$Gx \to G/_g\mathrm{Stab}(x).$$

Par exemple, l'action de $\mathcal{SO}(n)$ sur $\mathbb{S}^{n-1}$ étant transitive, le stabilisateur de $(1, 0, \ldots, 0)$ s'identifie à $\mathcal{SO}(n-1)$ et on a donc une bijection entre $\mathcal{SO}(n)/\mathcal{SO}(n-1)$ et $\mathbb{S}^{n-1}$.

2. Action d'un groupe fini

Dans toute cette section, G est un groupe fini.
On rappelle (théorème de Cayley) qu'un groupe fini d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe de S_n.
Équation aux classes. *Si X est fini et T désigne une transversale pour l'action de G sur X alors*

$$|X| = \sum_{x \in T} [G : \mathrm{Stab}(x)].$$

Exemple. Si G agit sur lui-même par conjugaison, on note T une transversale et P l'ensemble des $h \in G$ tels que $Gh = h$, alors

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{h \in T \setminus P} [G : \mathrm{Stab}(x)].$$

Corollaire. *Si G est un p-groupe alors*

$$\Big|\bigcap_{g \in G} \mathrm{Fix}(g)\Big| \equiv |X| \ \ mod\ p.$$

Application. Soit G un groupe d'ordre p^α, alors

(*i*) $|Z(G)| \geq p$

(*ii*) pour tout $0 \leq \beta \leq \alpha$, il existe un sous-groupe H de G d'ordre p^β.

Application (théorèmes de Sylow)**.** Soit G un groupe d'ordre $p^\alpha m$ où p est premier ne divisant pas m.

(*i*) G admet un p-sous-groupe de Sylow *i.e.* un sous-groupe d'ordre p^α.

(*ii*) Tout p-sous-groupe est contenu dans un p-sous-groupe de Sylow.

(*iii*) Tout les p-sous-groupes de Sylow sont conjugués

(*iv*) Le nombre n_p de p-sous-groupes de Sylow divise m et est congru à 1 modulo p.

Notons quelques conséquences des théorèmes de Sylow :
- si p divise l'ordre d'un groupe alors il existe un élément de G d'ordre p,
- G est un p-groupe si et seulement si tout élément de G est d'ordre une puissance de p,
- si G est abélien fini alors G est le produit direct de ses sous-groupes de Sylow.
- A_5 est le seul groupe simple d'ordre 60

Formule de Burnside-Frobenius. *Le nombre d'orbites de l'action de G sur X est*

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|\,.$$

Application (collier de perles)**.** Si on dispose d'un fil circulaire, de 4 perles bleues, de 3 perles blanches et de 2 perles rouges, combien de colliers différents peut-on faire avec ce matériel ?

Application (sous-groupes finis de $\mathcal{SO}(3)$)**.** Si G est un sous-groupe d'ordre $n \geq 2$ de $\mathcal{SO}(3)$ alors G est isomorphe à l'un des groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $D_{n/2}$, A_4, S_4 ou A_5.

3. Applications

3.1. Espaces affines.

Définition. Un *espace affine* est un ensemble non vide $\mathcal{E}$ sur lequel agit à droite, transitivement et librement le groupe additif d'un espace vectoriel E.

L'espace E est appelé la *direction* de $\mathcal{E}$ et les éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés des *points*. L'action de $\vec{u} \in E$ sur $M \in \mathcal{E}$ est notée $M + \vec{u}$.

Proposition. *Pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $\vec{u} \in E$, il existe un unique point $N \in \mathcal{E}$ tel que $N = M + \vec{u}$; on note alors $\vec{MN} = \vec{u}$ et $N = t_{\vec{u}}(M)$.*

Si A est fixé alors l'application $\varphi_A : E \to \mathcal{E}, \vec{u} \mapsto A + \vec{u}$ est bijective. Si $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ est une base de E, un point M s'écrit sous la forme $M = A + x_1\vec{e_1} + \cdots + x_n\vec{e_n}$ de façon unique.

Définition. Le système $(A, \vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ s'appelle un *repère cartésien* de $\mathcal{E}$ et $x_1, \dots, x_n$ sont les *coordonnées* de M dans ce repère.

3.2. Polynômes symétriques et anti-symétrique.

On considère l'action de $\mathcal{S}_n$ sur $\mathbb{K}[T_1, \dots, T_n]$ définie par $\sigma \cdot f(T_1, \dots, T_n) = f(T_{\sigma(1)}, \dots, T_{\sigma(n)})$.

Définition. On dit que $f \in \mathbb{K}[T_1, \dots, T_n]$ est

(*i*) *symétrique* si $\sigma \cdot f = f$ pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$,

(*ii*) *alterné* si $\sigma \cdot f = \varepsilon(\sigma) f$ pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$,

(*iii*) *semi-symétrique* si $\sigma \cdot f = f$ pour tout $\sigma \in \mathcal{A}_n$.

Exemple. Le k-è polynôme symétrique élémentaire est $\Sigma_k = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} T_{i_1} \cdots T_{i_k}$.

Exemple. $V(T_1, \dots, T_n) = \prod_{i<j}(T_j - T_i)$ est alterné.

Proposition. *Si f est symétrique alors il existe g unique tel que $f(T_1, \dots, T_n) = g(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n)$.*

Proposition. *Si f est semi-symétrique alors il existe g, h symétriques uniques tels que $f = g + Vh$.*

3.3. Action d'un groupe topologique.

Un *groupe topologique* est un groupe et un espace topologique tel que les opérations $g \mapsto g^{-1}$ et $(g, g') \mapsto gg'$ soient continues.

Définition. On dit qu'un groupe topologique G *agit continûment* sur un espace topologique X si l'action

$$G \times X \to X, (g, x) \mapsto gx$$

est une application continue.

Exemple. $GL_n(\mathbb{R})$ agit continûment sur $\mathbb{R}^n$

Exemple. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit continûment sur $\mathbb{S}^2$ par antipodie

Exemple. $SL_2(\mathbb{C})$ agit continûment sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ par homographies

Théorème. *Si G est un groupe topologique compact agissant continûment sur un espace topologique X séparé alors, pour tout $x \in X$, l'application*

$$\varphi : G/_g\mathrm{Stab}(x) \to Gx, \overline{g} \mapsto gx$$

est un homéomorphisme.

Application. Pour tout $n \geq 2$, $\mathcal{SO}(n)/\mathcal{SO}(n-1)$ et $\mathbb{S}^{n-1}$ sont homéomorphes ; il en résulte que $\mathcal{SO}(n)$ est connexe.

3.4. Action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré.

On identifie le plan $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{P}$ le demi-plan $\{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Im}\ z > 0\}$ et on considre le *groupe modulaire* $PSL_2(\mathbb{Z}) \simeq SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm \mathrm{I}_2\}$.

Proposition. *$SL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par les matrices*

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition. *L'action de $PSL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathcal{P}$ définie par*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}$$

admet pour transversale le domaine $\mathcal{D}_0$ défini par
– soit $-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\ z < \frac{1}{2}$ et $|z| > 1$,
– soit $-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\ z \leq 0$ et $|z| = 1$.

Proposition. *À $\mathbb{C}^*$-homothétie près, les réseaux du plan sont en bijection avec $\mathcal{D}_0$.*

Idées de développements

$\mathcal{A}_5$ est le seul groupe simple d'ordre 60.

Sous-groupes finis de SO(3).

Action de $\mathcal{A}_n$ sur $\mathbb{K}[T_1, \dots, T_n]$.

Action de $PSL_2(\mathbb{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré.

Références

[1] F. Combes, *Algèbre et géométrie*, Bréal, 1998.

[2] R. Mneimné et F. Testard, *Groupes de Lie classiques*, Hermann, 1986.

[3] D. Perrin, *Cours d'algèbre*, Ellipses, 1996.

[4] M. Alessandri, *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique*, Dunod, 1999.