Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Par Nicolas Lanchier [1]

1 Action de groupe, équation aux classes.

DÉFINITION 1.1 — On dit qu'un groupe G opère sur un ensemble X s'il existe une application $\varphi : G \times X \longrightarrow X$, $\varphi(g, x) = g \cdot x$, telle que

$$\forall\ g, h \in G \qquad \forall\ x \in X \qquad g \cdot (h \cdot x) \ = \ (g \cdot h) \cdot x \qquad \text{et} \qquad e \cdot x \ = \ x$$

où e désigne l'élément neutre de G. [5], Sect. 1.4

REMARQUE 1.2 — L'action de G sur un ensemble X équivaut à la donnée d'un morphisme de groupe $\psi : G \longrightarrow \sigma(X)$ où $\sigma(X)$ désigne le groupe des bijections de X. [5], Sect. 1.4

DÉFINITION 1.3 — On appelle stabilisateur de $x \in X$ l'ensemble noté $S(x)$ des $g \in G$ pour lesquels $g \cdot x = x$. [5], Sect. 1.4

DÉFINITION 1.4 — La G-orbite de X est définie par $O(x) = \{\, g \cdot x\,,\ g \in G\,\}$. [5], Sect. 1.4

DÉFINITION 1.5 — Un groupe G opère transitivement sur X si X est une G-orbite, i.e.

$$\forall\ x, y \in X \qquad \exists\ g \in G \qquad \text{tel que} \qquad y \ = \ g \cdot x$$

Si de plus g est unique on dira que G opère simplement transitivement sur X. [5], Sect. 1.4

EXEMPLE 1.6 — Soient $P \in K[X]$ un polynôme de corps de décomposition L et $G = \mathrm{Gal}(L|K)$ son groupe de Galois. Alors G agit sur l'ensemble X des racines de P. Si de plus P est irréductible, cette action est transitivement.

THÉORÈME 1.7 (ÉQUATION AUX CLASSES) — Soient G un groupe fini opérant sur un ensemble X fini et Λ un système de représentants des G-orbites de X. Alors

$$\mathrm{card}(X) \ = \ \sum_{x \in \Lambda} \mathrm{card}(O(x)) \ = \ \sum_{x \in \Lambda} \frac{\mathrm{card}(G)}{\mathrm{card}(S(x))}$$

THÉORÈME 1.8 (WEDDERBURN) — Tout corps fini est commutatif. [5], Sect. 3.4

2 Applications en théorie des groupes.

THÉORÈME 2.1 (CAYLEY) — Si G est un groupe fini de cardinal n alors G est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. [5], Sect. 1.4

PROPOSITION 2.2 — Soit G un p-groupe de cardinal ≥ 2. Alors le centre de G n'est pas réduit au singleton $\{e\}$. [5], Sect. 1.4

THÉORÈME 2.3 (PREMIER THÉORÈME DE SYLOW) — Soient G un groupe fini et p un diviseur premier de $\mathrm{card}(G)$. Alors G contient au moins un p-sous-groupe de Sylow. [5], Sect. 1.5

THÉORÈME 2.4 (SECOND THÉORÈME DE SYLOW) — Soit G un groupe fini de cardinal $p^\alpha m$ avec p premier ne divisant pas m.

1. si H est un p-sous-groupe de G, il existe un p-sous-groupe de Sylow de G contenant H ;
2. les p-sous-groupes de Sylow de G sont conjugués donc leur nombre k divise n ;
3. $k \equiv 1 \mod p$ donc k divise m. [5], Sect. 1.5

3 Formule de Burnside et polyèdres réguliers.

Théorème 3.1 (formule de Burnside) — Soient G un groupe fini opérant sur un ensemble X fini et k le nombre de G-orbites de X. Alors

$$k\ \mathrm{card}(G) \ = \ \sum_{g \in G} \mathrm{card}\,\mathrm{Fix}(g) \qquad \text{où} \quad \mathrm{Fix}(g) \ = \ \{\, x \in X \,,\, g \cdot x = x \,\}$$

[2], Ch. 5

Proposition 3.2 — Le groupe $O_3^+(\mathbb{R})$ agit transitivement sur la sphère S^2. [1], Sect. 5.3

Proposition 3.3 — Toute isométrie $g \in O_3^+(\mathbb{R})$, $g \neq \mathrm{id}$, admet exactement deux points fixes x et $-x \in S^2$ appelés pôles de g. [1], Sect. 5.3

Théorème 3.4 — Soit G un sous-groupe fini de $O_3^+(\mathbb{R})$ d'ordre n. Alors

1. G opère sur l'ensemble P des pôles de $G - \{\mathrm{id}\}$;
2. pour tout $x \in P$, $S(x)$ est cyclique ;
3. pour tout $y \in O(x)$, $\mathrm{card}\, S(x) \ = \mathrm{card}\, S(y)$;
4. si Λ désigne un système de représentants des G-orbites de P alors

$$2(n-1) \ = \ n \sum_{x \in \Lambda} 1 - (\mathrm{card}\, S(x))^{-1}$$

[1], Sect. 5.3

Théorème 3.5 — Le groupe $O_3^+(\mathbb{R})$ admet exactement 5 classes de sous-groupes finis :

1. le groupe cyclique $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ des déplacements stabilisant un polygone régulier ;
2. le groupe diédral $D_{n/2}$ des isométries stabilisant un polygone régulier ;
3. le groupe tétraédral $\mathfrak{A}_4$ des déplacements stabilisant le tétraèdre ;
4. le groupe octaédral $\mathfrak{S}_4$ des déplacements stabilisant le cube et l'octaèdre ;
5. le groupe icosaédral $\mathfrak{A}_5$ des déplacements stabilisant le dodécaèdre et l'icosaèdre.

[3], Sect. 1.3

Application 3.6 — Le nombre N de façons de colorier un cube avec k couleurs distinctes est donné par

$$N \ = \ \frac{1}{24}\,(k^6 + 3k^4 + 12k^3 + 8k^2)$$

[4], Sect. 4.3

Références

[1] Alain Bouvier, Denis Richard. *Groupes. Observation, théorie, pratique.* Hermann, 1994.

[2] Josette Calais. *Eléments de théorie des groupes.* Puf, 1998.

[3] M. Fetizon, H.P. Gervais, A. Guichardet. *Théorie des groupes et leurs représentations. Application à la spectroscopie moléculaire.* Ellipses, 1987.

[4] Eric Lehman. *Mathématiques pour l'étudiant de première année. Algèbre et géométrie.* Belin, 1984.

[5] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre.* Ellipses, 1996.