

# 111 Exemples d'application des idéaux d'un anneau commutatif unitaire.

*Jonathan Loupia* [jonas001@free.fr](mailto:jonas001@free.fr) <http://jonas001.free.fr/agreg/index2.htm>

## Plan :

### 1) Généralités

- idéaux, idéaux premiers, idéaux maximaux
- th de factorisation

### 2) Anneaux principaux

- déf (ex : polynôme minimal d'un endomorphisme) - pgcd
- Bezout (appli : lemme des noyaux)
- ppcm (appli : tout s-g fini de  $K^*$  est cyclique)

### 3) Anneaux quotients

- factorialité des anneaux de polynômes (appli : critère dirréductibilité (Einsenstein + polynômes cyclotomiques))
- factorialité de  $\mathbb{Z}[i]$  (appli :  $p =$  somme de 2 carrés)
- corps :
  - ▷  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  :  $x$  irr  $\Leftrightarrow (x)$  maximal; appli : arithmétique (petit th Fermat)-géométrie (nbres constructibles)
  - ▷ corps de rupture : construction de corps finis ou de  $\mathbb{C}$ .
- lemme chinois (appli Berlekamp)

### 4) Anneaux noethériens ?

## Développements :

- th des 2 carrés [P 57]
- Berlekamp [Dem]
- Einsenstein [G1 58] ou [Goz 11]
- lemme des noyaux

## Bibliographie

- Fresnel "Anneaux" [F4]
- Gourdon "Algèbre" [G1]
- Demazure "Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes" [Dem]
- Gozard "Théorie de Galois" [Goz]
- Perrin "Cours d'algèbre" [P]