Déterminant. Applications en algèbre et en géométrie.

Par Nicolas Lanchier [1]

1 Propriétés classiques et règles de calcul.

Dans toute la suite, K est un corps commutatif et E un K-espace vectoriel de dimension n.

Définition 1.1 — Une forme n-linéaire $f \in L_n(E)$ est dite alternée si $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ dès que $x_i = x_j$ pour un $i \neq j$. [2], Sect. 3.5

Théorème 1.2 — L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est un K-espace vectoriel de dimension 1. De plus, étant donnée une base B de E, il existe une et une seule forme n-linéaire alternée prenant la valeur 1 sur B. On l'appelle déterminant dans la base B et on la note $\det_B$.

Proposition 1.3 — Si $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ avec $x_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,n})$ alors

$$\det(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ = \ \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \ x_{1,\sigma(1)} \, x_{2,\sigma(2)} \cdots x_{n,\sigma(n)}$$

où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ. [2], Sect. 3.5

Proposition 1.4 — Pour tout n-uplet de vecteurs $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$, les assertions suivantes sont équivalentes

1. les vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ forment une famille liée ;
2. pour toute base B de E, $\det_B(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$;
3. il existe une base B de E telle que $\det_B(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. [2], Sect. 3.5

Définition 1.5 — Soient f une application linéaire et $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors le scalaire $\det(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$ ne dépend pas du choix B ; on l'appelle déterminant de f.

Proposition 1.6 — Pour toutes applications linéaires f et g, $\det(f \cdot g) = \det(f) \times \det(g)$. De plus, f est inversible si et seulement si $\det(f) \neq 0$ et dans ce cas $\det(f^{-1}) = (\det f)^{-1}$.

Proposition 1.7 (développement selon une ligne ou une colonne) — Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice et $A_{i,j}$ les cofacteurs des éléments de A. Alors

1. développement selon la i-ième ligne : $\det A = a_{i,1} \, A_{i,1} + a_{i,2} \, A_{i,2} + \cdots + a_{i,n} \, A_{i,n}$.
2. développement selon la j-ième colonne : $\det A = a_{1,j} \, A_{1,j} + a_{2,j} \, A_{2,j} + \cdots + a_{n,j} \, A_{n,j}$.

2 Applications en algèbre.

Théorème 2.1 (système de Cramer) — Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée, $B = (b_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ deux vecteurs colonnes. Le système linéaire $AX = B$ admet une unique solution X si et seulement si $\det A \neq 0$. Dans ce cas, le vecteur X est donné par

$$x_i \ = \ \frac{\det(A_1, \cdots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \cdots, A_n)}{\det A}$$

Définition 2.2 — Soit A la matrice d'une application linéaire $f \in L(E)$. On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme $P_A(X) = \det(A - X \cdot \mathrm{id})$. [2], Sect. 4.1

Théorème 2.3 (Cayley-Hamilton) — Soit P le polynôme caractéristique d'une application linéaire $f \in L(E)$. Alors $P(f) = 0$. [2], Sect. 4.2

Théorème 2.4 — Pour tout $r \in \mathbb{N}$, posons $\Gamma_r = \{ P \in \mathbb{C}[X] \,;\, \deg P = r \}$. Alors pour tous n, $m \geq 1$, il existe une application continue $R : \Gamma_n \times \Gamma_m \longrightarrow \mathbb{C}$ appelée résultant telle que $R(P, Q) \neq 0$ si et seulement si P et Q sont premiers entre-eux. [2], Sect. 1.4

Application 2.5 — Soit D l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$. L'intérieur de D est l'ensemble des matrices dont les valeurs propres sont toutes distinctes. [2], Sect. 4.5

3 Applications en géométrie.

Définition 3.1 — L'espace vectoriel $\Lambda^n E^*$ des formes multilinéaires alternées de degré n sur E est de dimension 1. En particulier, $\Lambda^n E^* - \{0\}$ admet exactement deux composantes connexes. On appelle orientation de E le choix de l'une de ces composantes $\mathcal{O}$. Une base $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E est dite directe si pour tout $\omega \in \mathcal{O}$, $\omega(e_1, e_2, \ldots, e_n) > 0$. [1], Sect. 2.7

Proposition 3.2 — Soit X un espace affine de dimension 3 et a, b, $c \in X$ des points non alignés. L'équation du plan passant P passant par a, b, c est alors donnée par

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 & b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \\ x_3 - a_3 & b_3 - a_3 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0$$

[4], Sect. 5.4

Théorème 3.3 (inégalité d'Hadamard) — Les vecteurs colonnes X_1, X_2, $\ldots$, X_n d'une matrice M à coefficients dans $\mathbb{C}$ vérifient

$$|\det M| \leq \|X_1\| \cdot \|X_2\| \cdots \|X_n\|$$

De plus, si pour tout $1 \leq i \leq n$, $X_i \neq 0$, l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si la famille $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est orthogonale. [2], Sect. 5.3

Théorème 3.4 — Soient E un espace préhilbertien, V un sous-espace de E, $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de V et $x \in E$. Alors la distance d de x à V est donnée par

$$d^2 = \frac{G(e_1, e_2, \ldots, e_n, x)}{G(e_1, e_2, \ldots, e_n)}$$

où l'application G désigne le déterminant de Gram. [2], Sect. 5.3

Application 3.5 (Müntz) — Soient $C([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et α_n, $n \geq 0$, une suite strictement croissante à valeurs positives. Alors, l'espace vectoriel

$$E = \operatorname{vect}(\, f_n(x) = x^{\alpha_n} \,;\, n \geq 0 \,)$$

est dense dans $C([0,1], \mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_{L^2}$ si et seulement si la série de terme générale α_n^{-1} diverge. [3], Sect. 4.6

Références

[1] Marcel Berger. *Géométrie. Tome 1.* Nathan, 1990.

[2] Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Algèbre.* Ellipses, 1994.

[3] Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse.* Ellipses, 1994.

[4] Pierre Mazet. *Algèbre et géométrie pour le CAPES et l'agrégation.* Ellipses, 1996.