Algèbre 24 – Sous-espaces stables d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n et F un sous-espace de dimension p. On note μ_u le polynôme minimal et χ_u le polynôme caractéristique de $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Définitions et caractérisations

1.1. Définitions et exemples fondamentaux.

Définition. On dit que F est *u-stable* si $u(F) \subset F$.

La restriction $u_{|F} : F \to F, x \mapsto u(x)$ est alors dans $\mathcal{L}(F)$.

Exemples. Les sous-espaces suivants sont u-stables :
- $\{0\}$ et E,
- $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$,
- les sous-espaces propres et caractéristiques de u,
- $\ker P(u)$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.

Proposition. *Si $u \circ v = v \circ u$ alors $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ sont v-stables.*

Exemple. Si $u \circ v = v \circ u$ alors les sous-espaces propres de u sont v-stables.

Proposition. *Une droite D est u-stable si et seulement si u admet une valeur propre λ telle que $D \subset \ker(u - \lambda \mathrm{id})$.*

Exemple. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors u admet une droite stable. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors u admet une droite stable ou un plan stable.

Application. Si $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ stabilise toute droite alors u est une homothétie.

1.2. Caractérisation matricielle.

Proposition. *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E avec $(e_1, \dots, e_p)$ base de F. Alors F est u-stable si et seulement la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est la matrice de $u_{|F}$ dans $(e_1, \dots, e_p)$.*

Corollaire. *Soit $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$ une base de E associée à une décomposition $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_k$ alors chaque F_i est u-stable si et seulement si la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $\operatorname{diag}(A_1, \dots, A_k)$ où $A \in \mathcal{M}_{\dim F_i}(\mathbb{K})$ est la matrice de $u_{|F_i}$ dans la base $\mathcal{B}_i$.*

Application. Si $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_k$ avec les F_i u-stables alors $\chi_u = \chi_{u_{|F_1}} \cdots \chi_{u_{|F_k}}$.

Application (Cayley-Hamilton). $\chi_u(u) = 0$.

Application. Si $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ stabilise tout sous-espace de dimension r alors u est une homothétie.

1.3. Caractérisation par dualité.

On rappelle que ${}^t u \in \mathcal{L}(E^*)$ est défini par ${}^t u(f) = f \circ u$ et l'orthogonal de F est $F^\perp = \{\varphi \in E^*; \forall x \in F, \varphi(x) = 0\}$.

Proposition. *F u-stable $\iff$ $F^\perp$ ${}^t u$-stable.*

Application. Un hyperplan H est u-stable si et seulement si ${}^t u$ admet un vecteur propre $f \in E^*$ tel que $H^\perp = \mathbb{K} f$.

2. Polynômes et sous-espaces caractéristiques

2.1. Applications du lemme des noyaux.

Proposition. *Soit $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux, alors $\ker(P_1 \cdots P_k(u)) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker P_i(u)$ et les projections associées sont dans $\mathbb{K}[u]$.*

Application. Si $\mu_u = (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_s)^{m_s}$ alors $E = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(u - \lambda_i \mathrm{id})^{m_i}$.

Application. Structure des suites récurrentes linéaires complexes.

Proposition. *Si $\mu_u = (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_s)^{m_s}$ et F est u-stable alors $F = \bigoplus_{i=1}^{k} (F \cap \ker(u - \lambda_i \mathrm{id})^{m_i})$.*

2.2. L'exemple des séries d'endomorphismes.

On considère une série entière $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

Lemme. *Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ alors :*

(i) $\rho(A) < R \Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n A^n$ converge absolument,

(ii) $\rho(A) > R \Rightarrow (a_n A^n)_{n \geq 0}$ non bornée.

Proposition. *Soit $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ diagonalisables avec $\rho(u) < R$, $\rho(v) < R$ et $f(u) = f(v)$. Si f est injective sur $\operatorname{Sp}(u) \cup \operatorname{Sp}(v)$ alors $u = v$.*

Application. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable et telle que $\exp A$ soit diagonale alors A est diagonale.

Remarque. En revanche, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, le fait que $\exp(A) = \mathrm{I}_n$ signifie que A est diagonalisable à valeurs propres dans $2i\pi\mathbb{Z}$.

3. Applications à la réduction

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

3.1. Trigonalisation et drapeaux stables.

Définition. Un *drapeau* de E est une suite $F_1 \subset \dots \subset F_n$ de sous-espaces de E telle que $\dim F_i = i$.

Définition. Un drapeau $F_1 \subset \dots \subset F_n$ est *u-stable* si chaque F_i est u-stable.

Proposition. *On a équivalence entre*

(i) u est trigonalisable,

(ii) il existe un drapeau u-stable,

(iii) u est annulé par un polynôme scindé,

(iv) μ_u est scindé.

Application. Si F est u-stable avec u trigonalisable alors $u_{|F}$ est trigonalisable.

3.2. **Diagonalisation et droites stables.**

Proposition. *On a équivalence entre*

- (*i*) *u est diagonalisable,*
- (*ii*) *il existe n droites indépendantes u-stbales,*
- (*iii*) *u est annulé par un polynôme scindé à racines simples,*
- (*iv*) *μ_u est scindé à racines simples.*

Application. Si F est u-stable avec u diagonalisable alors $u_{|F}$ est diagonalisable.

3.3. **Réductions simultanées.**

Proposition. *Si $u \circ v = v \circ u$ et si*

- (*i*) *u et v sont trigonalisables alors il existe une base commune de trigonalisation,*
- (*ii*) *u et v sont diagonalisables alors il existe une base commune de diagonalisation.*

Application. Unicité de la racine carrée d'un endomorphisme symétrique positif.

3.4. **Réduction de Dunford.**

Proposition. *Si χ_u est scindé alors u s'écrit de façon unique $u = d + n$ avec d diagonalisable, n nilpotent et $d \circ n = n \circ d$. De plus, d et n sont des polynômes en u.*

Remarque. Si χ_u est scindé alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de u soit de la forme

$$\operatorname{diag}(\lambda_1 \mathrm{I}_{n_1} + N_1, \ldots, \lambda_s \mathrm{I}_{n_s} + N_s)$$

où les blocs N_i sont nilpotents.

Application. L'application exponentielle réalise une surjection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur $GL_n(\mathbb{C})$.

Application. Si N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} N(A^n)^{1/n} = \rho(A)$.

3.5. **Sous-espaces cycliques.**

Proposition. *Il existe $x_0 \in E$ non nul tel que μ_u engendre $\{P \in \mathbb{K}[X]; P(u)(x_0) = 0\}$.*

Définition. On dit que F est *u-cyclique* s'il existe $x_0 \in E$ non nul tel que $F = \operatorname{Vect}_{\mathbb{K}}(u^k(x_0))_{k\in\mathbb{N}}$.

Définition et proposition. Il existe des sous-espaces u-stables $F_1, \ldots, F_k$ de E tels que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_k$ avec chaque F_i $u_{|F_i}$-cyclique et $\mu_{u_{|F_{i+1}}}$ qui divise $\mu_{u_{|F_i}}$. Les $\mu_{u_{|F_i}}$ sont indépendants du choix de la décomposition, on les appelle les *invariants de similitude* de u.

Application. Deux endomorphismes de E sont semblables si et seulement s'ils ont les mêmes invariants de similitude.

4. Cas particuliers

4.1. **Réduction dans les espaces euclidiens ou hermitiens.** Soit E un espace euclidien ou hermitien muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$. Si $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$, on note u^* l'unique endomorphisme tel que $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$ pour tous x, y.

Définition. On dit que u est *normal* si $u \circ u^* = u^* \circ u$.

Proposition. *Si $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ alors on a équivalence entre*

- (*i*) *u est normal*
- (*ii*) *u se diagonalise en base orthonormée*
- (*iii*) *tout sous-espace u-stable est u^*-stable*
- (*iv*) *l'orthogonal d'un sous-espace u-stable est u-stable*

Proposition. *Si $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est normal alors il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de u soit de la forme* $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, A_1, \ldots, A_s)$ *où $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ et $A_j = \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.*

Application. Si u est symétrique (ou hermitien) alors il existe une base orthonormée de vecteurs propres pour u.

Application. Soit Φ une forme quadratique, il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de Φ soit diagonale réelle.

Application. Obtention d'une racine carrée d'une matrice symétrique positive.

Application. L'application exponentielle réalise un homéomorphisme de $\operatorname{Sym}(n)$ sur $\operatorname{Sym}^{++}(n)$.

4.2. **Endomorphismes semi-simples.**

Définition. On dit que f est *semi-simple* si pour tout sous-espace F de E stable par f, il existe un supplémentaire S de F stable par f.

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite semi-simple si l'endomorphisme $x \mapsto Mx$ est semi-simple.

Lemme. *Si μ_f est irréductible alors f est semi-simple.*

Proposition. *f est semi-simple si et seulement si μ_f est sans facteur carré.*

Corollaire. *Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos alors f est semi-simple si et seulement si f est diagonalisable.*

Proposition. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

- (*i*) *M est semi-simple si et seulement si M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*
- (*ii*) *Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semi-simple alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^tPMP = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ avec D diagonale et B constituée de blocs de la forme $\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ centrés sur sa diagonale principale.*

Développements

Cas où $\exp(A)$ est diagonale.

Réduction de Dunford et surjectivité de l'exponentielle.

Endomorphismes semi-simples.

Références

[1] T. Dugardin et J. Guégand, *Algèbre en classes préparatoires*, Ellipses, 1999.

[2] X. Gourdon, *Algèbre*, Ellipses, 1994.

[3] P. Tauvel, *Mathématiques générales pour l'agrégation*, Masson, 1997.