Algèbre 38 – Exponentielle de matrices. Applications.

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme d'algèbre.

1. Définition et généralités

Définition. On appelle *exponentielle* de $A \in M_n(\mathbb{K})$, la somme de la série normalement convergente

$$\exp A = \sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!}.$$

Remarque. L'application $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), A \mapsto \exp A$ est continue.

Exemple. $\exp(\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}\right)$; en particulier, $\exp 0 = \mathrm{I}_n$.

Proposition. *Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$.*
- *si $AB = BA$ alors $\exp A . \exp B = \exp(A + B)$*
- *$\exp A$ est inversible d'inverse $\exp(-A)$ d'où $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) \subset GL_n(\mathbb{K})$*
- *$\exp({}^tA) = {}^t(\exp A)$ d'où $\exp(\mathcal{S}(n)) \subset \mathcal{S}(n)$*
- *$\exp \overline{A} = \overline{\exp A}$*
- *$\exp(A^*) = (\exp A)^*$ d'où $e^{\mathcal{H}(n)} \subset \mathcal{H}(n)$*
- *$\exp(P^{-1}AP) = P^{-1} \exp(A)P$ i.e. deux matrices semblables ont des exponentielles semblables*
- *Il existe $P_A \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\exp A = P_A(A)$; en particulier A et $\exp A$ commutent.*

Contre-exemple. Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \theta & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (où $\theta \in \mathbb{R}$) alors $A^2 = B^2 = 0$ d'où

$\exp A = \mathrm{I}_2 + A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \theta & 1 \end{bmatrix}$ et $\exp B = \mathrm{I}_2 + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \theta & 1 \end{bmatrix}$

alors que $\exp(A + B) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors*

(*i*) $\exp(\mathrm{Sp}(A)) = \mathrm{Sp}(\exp A)$

(*ii*) $\det(\exp A) = \exp(\mathrm{Tr}\ A)$

(*iii*) *si χ_A est scindé alors*

$$A \text{ diagonalisable} \iff \exp A \text{ diagonalisable}$$

Application. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors

$$\exp A = \mathrm{I}_n \iff A \text{ diagonalisable et } \mathrm{Sp}(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}.$$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable alors

$$A \text{ diagonale} \iff \exp A \text{ diagonale}.$$

2. Régularité de l'application exponentielle

Proposition. *L'exponentielle*

$$\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to GL_n(\mathbb{K})$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$, vérifie $d(\exp)_0 = \mathrm{id}$ et réalise un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $M_n(\mathbb{K})$ sur un voisinage de I_n dans $GL_n(\mathbb{K})$.

Application. $GL_n(\mathbb{K})$ n'a pas de sous-groupe arbitrairement petit *i.e.* il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de I_n dans $GL_n(\mathbb{K})$ tel que $\{\mathrm{I}_n\}$ est le seul sous-groupe G inclu dans $\mathcal{V}$.

Application. Pour tout morphisme de groupes additifs $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une unique matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $\varphi(t) = \exp(tA)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$; en particulier, φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Proposition. *Pour tous $X, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a*

$$d(\exp)_X(H) = \exp X \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(k+1)!}(-\mathrm{ad}_X)^k(H)$$

où $\mathrm{ad}_X : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), H \mapsto XH - HX$.

Application. Si $X(t)$ et $X'(t)$ commutent alors $(\exp X(t))' = X'(t) \exp X(t)$.

Contre-exemple. $X(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Définition. Si $A \in \mathbb{B}(\mathrm{I}_n, 1) \subset GL_n(\mathbb{K})$, on appelle *logarithme* de A la somme de la série normalement convergente

$$\log A = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{(A - \mathrm{I}_n)^n}{n}.$$

Remarque. L'application $\mathbb{B}(\mathrm{I}_n, 1) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), A \mapsto \log A$ est continue.

Proposition. $\forall A \in \mathbb{B}(\mathrm{I}_n, 1),\ \exp(\log A) = A$

Application. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, alors
- $\exp A = \lim\limits_{k\to+\infty} \left(\mathrm{I}_n + \dfrac{A}{k}\right)^k$
- si $(A_k)_k$ est une suite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui tend vers A alors

$$\exp A = \lim_{k\to+\infty} \left(\mathrm{I}_n + \frac{A_k}{k}\right)^k$$

- $\exp(A + B) = \lim\limits_{k\to+\infty} \left(\exp(\dfrac{A}{k}) \exp(\dfrac{B}{k})\right)^k$
- $\exp(AB - BA) =$

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\exp(\frac{A}{k}) \exp(\frac{B}{k} \exp(-\frac{A}{k}) \exp(-\frac{A}{k}))\right)^{k^2}$$

Application. Si G est un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{K})$ alors $\mathfrak{g} = \{A \in M_n(\mathbb{K})\ ;\ \exp(tA) \in G\ ,\ \forall t \in \mathbb{R}\}$ est un s.e.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stable pour $[A, B] = AB - BA$.

Proposition. *L'application* $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ *est surjective.*

Application. Si $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $p \geq 1$ alors il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = B^p$.

Application. $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs

Proposition. *Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ n'admet pas de valeur propre réelle alors il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = \exp B$. De plus on a*

$$\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{M^2\ ;\ M \in GL_n(\mathbb{R})\} \subsetneq GL_n^+(\mathbb{R}).$$

3. Quelques applications

3.1. Des homéomorphismes liés à l'exponentielle.

Proposition. *L'exponentielle est un homéomorphisme (dont l'inverse est le logarithme) de l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur l'ensemble des matrices unipotentes.*

Proposition. *L'exponentielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ réalise un homéomorphisme entre $\mathcal{S}(n)$ et $\mathcal{S}^{++}(n)$.*
L'exponentielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ réalise un homéomorphisme entre $\mathcal{H}(n)$ et $\mathcal{H}^{++}(n)$.

Application. On a les homéomorphismes suivants

$$GL_n(\mathbb{R}) \simeq \mathcal{O}(n) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \text{ et } GL_n(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{U}(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$$

3.2. Systèmes différentiels.

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'équation différentielle $Y' = AY$ a ses solution maximales définies sur $\mathbb{R}$ et la solution prenant une valeur donnée $V_0 \in \mathbb{R}^n$ en $t = 0$ est $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, t \mapsto \exp(tA)V_0$.*

Théorème de Liapounov. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $f(0) = 0$ et telle que $\mathrm{Re}\ \lambda < 0$ pour toute valeur propre λ de df_0. Alors pour x_0 voisin de 0, la solution $x(t)$ de $X' = f(X), X(0) = x_0$ tend exponentiellement vers 0 lorsque t tend vers l'infini.*

Développements

Cas où $\exp A$ est diagonale.

Surjectivité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur $GL_n(\mathbb{C})$ et applications.

Homéomorphisme entre $\mathcal{H}(n)$ et $\mathcal{H}^{++}(n)$.

Théorème de Liapounov.

Références

[1] X. Gourdon, *Algèbre*, Ellipses, 1994.

[2] J. Hubbard et B. West, *Équations différentielles et systèmes dynamiques*, Cassini, 1999.

[3] R. Mneimné et F. Testard, *Groupes de Lie classiques*, Hermann, 1986.

[4] L. Rosaz et M. Zeitoun, *Problèmes corrigés de mathématiques posés aux concours des É.N.S.*, Ellipses, 1990.

[5] F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Cassini, 1999.

[6] J.-E. Rombaldi, *Thèmes pour l'agrégation de mathématiques*, EDP Sciences, 1999.