Algèbre 39 – Endomorphismes nilpotents

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Propriétés et caractérisations

Définition. Endomorphisme nilpotent ; matrice nilpotente ; indice de nilpotence.

Exemple. matrice nilpotente canonique d'indice r.

Proposition. *Si u est nilpotent d'indice r alors il existe $x \in E$ tel que $u^{r-1}(x) \neq 0$. De plus $(x, u(x), \ldots, u^{r-1}(x))$ est libre et engendre un sous-espace stable de E*

Corollaire. *Si u est nilpotent d'indice r alors $r \leq n$.*

Proposition. *On a équivalence entre*

- (i) *u nilpotent*
- (ii) *pour tout $x \in E$, il existe $k \geq 1$ tel que $u^k(x) \neq 0$,*
- (iii) *il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u soit de la forme* $\begin{bmatrix} 0 & & \star \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{bmatrix}$.

Remarque. En dimension infinie, un endomorphisme peut vérifier (ii) sans être nilpotent ; prendre par exemple $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], P \mapsto P'$.

Proposition. *On a équivalence entre*

- (i) *u nilpotent,*
- (ii) *0 est la seule valeur propre de u dans une clôture algébrique,*
- (iii) $\mathrm{Tr}\,(u^p) = 0$ *pour tout $p \geq 1$.*

Application. Un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ est fini si et seulement s'il est d'exposant fini.

Proposition. *u nilpotent $\iff \chi_u = (-1)^n X^n$*
u nilpotent d'indice r $\iff \mu_u = X^r$

Application. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement s'il existe une suite de matrices semblables à A qui tende vers 0.

2. Décomposition remarquables et endomorphismes nilpotents

Proposition. *Posons $F = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \ker u^k$ et $G = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}\ u^k$ alors*
- *$E = F \oplus G$*
- *F et G sont stables par u*
- *$u_{|F}$ est nilpotent et $u_{|G}$ est inversible*

De plus, F et G sont les seuls sous-espaces de E vérifiant ces propriétés.

Proposition. *Réduction de Dunford.*

Application. Formule du rayon spectral.

Définition. Endomorphismes cycliques

Proposition. *Caractérisation des endomorphismes nilpotents cycliques.*

Proposition. *Réduction de Jordan pour les endomorphismes nilpotents.*

Application. Réduction de Jordan dans le cas général.

3. Applications au séries d'endomorphismes

Définition. Séries entières d'endomorphismes.

Proposition. *Condition $\rho(u) < R$.*

Exemple. Exponentielle.

Exemple. Logarithme et inverse de $\mathrm{id} - u$.

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec χ_A scindé alors*

$$A \text{ diagonalisable} \iff \exp A \text{ diagonalisable.}$$

Application. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors

$$\exp A = \mathrm{I}_n \iff A \text{ diagonalisable et } \mathrm{Sp}(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}.$$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable alors

$$A \text{ diagonale} \iff \exp A \text{ diagonale.}$$

Proposition. *Surjectivité de l'exponentielle sur $\mathbb{C}$.*

Proposition. *L'exponentielle réalise un homéomophisme des matrices nilpotents sur les matrices unipotentes.*

Développements

Théorèmes de Burnside.

Réduction de Dunford et application.

Cas où $\exp(A)$ est diagonale.

Références

[1] M. Alessandri, *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique*, Dunod, 1999.

[2] X. Gourdon, *Algèbre*, Ellipses, 1994.

[3] R. Mneimné et F. Testard, *Groupes de Lie classiques*, Hermann, 1986.

[4] P. Tauvel, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Algèbre 2*, Masson, 1994.

[5] J.-E. Rombaldi, *Thèmes pour l'agrégation de mathématiques*, EDP Sciences, 1999.