Algèbre 40 – Polynômes d'endomorphismes. Applications

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. L'algèbre $\mathbb{K}[u]$

Définition. Polynôme d'endomorphisme/de matrice.

Remarque. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P(u)) = P(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$

Exemple. Polynôme caractéristique χ_u.

Définition et proposition. L'application $\varphi_u : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E), P \mapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbre et :
- Im φ_u est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$ notée $\mathbb{K}[u]$,
- $\ker \varphi_u$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

Remarque. $\mathbb{K}[u]$ n'est en général pas intègre.

Définition. Polynôme annulateur.

Exemple. Polynôme minimal μ_u.

Exemple. $X^2 - X$ est annulateur pour tout projecteur.

Exemple. X^n est annulateur pour tout endomorphisme nilpotent.

Lemme. *Si u est inversible alors $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.*

Proposition. *Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on a*

$$P(u) \text{ inversible} \iff P \wedge \mu_u = 1 \iff P \wedge \chi_u = 1.$$

Corollaire. *On a*

$$\mathbb{K}[u] \text{ corps} \iff \mathbb{K}[u] \text{ intègre} \iff \mu_u \text{ irréductible.}$$

2. Lemme des noyaux et réduction

Lemme des noyaux.

Définition et proposition. Caractérisations équivalentes de la trigonalisabilité de u.

Exemple. Si $Kset$ est algébriquement clos alors u est trigonalisable.

Application. μ_u divise χ_u.

Application. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de u alors $P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)$ sont les valeurs propres de $P(u)$.

Définition et proposition. Caractérisations équivalentes de la diagonalisabilité de u.

Exemple. Tout projecteur est diagonalisable.

Exemple. Un endomorphisme nilpotent et diagonalisable est nul.

Application. Si G est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ alors G est fini si et seulement si G est d'exposant fini.

Application. Si $\mu_u = P_1^{\alpha_1} \cdots P_r^{\alpha_r}$ et $u(F) \subset F$ alors on a $F = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{r} (F \cap \ker P_i^{\alpha_i}(u))$.

Remarque. Si u est diagonalisable et $u(F) \subset F$ alors $u_{|F}$ est diagonalisable.

3. Sous-espaces stables et réduction par blocs

3.1. Réduction de Dunford.

Proposition. *Si χ_u est scindé alors il existe d diagonalisable et n nilpotent uniques tels que $u = d + n$ avec $d \circ n = n \circ d$. De plus $d, n \in \mathbb{K}[u]$.*

Remarque. Écriture par blocs d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Application. Formule du rayon spectral.

3.2. Invariants de similitude.

Définition et proposition. Invariants de similitude.

Proposition. *Réduction de Frobenius.*

Application. Deux endomorphismes sont semblables si et seulement s'ils ont les mêmes invariants de similitude.

3.3. Endomorphismes semi-simples.

Définition. endomorphisme/matrice semi-simple.

Lemme. *Si μ_u est irréductible alors u est semi-simple.*

Proposition. *u semi-simple $\iff$ μ_u sans facteur carré*

Corollaire. *Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos alors u est semi-simple si et seulement si u est diagonalisable.*

Proposition. *Réduction de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semi-simple.*

4. Séries d'endomorphismes

Définition. Séries entières d'endomorphismes.

Proposition. *Condition $\rho(u) < R$.*

Exemple. Inverse de $\mathrm{id} - u$.

Exemple. Exponentielle.

Application. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec χ_A scindé alors

$$A \text{ diagonalisable} \iff \exp A \text{ diagonalisable.}$$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors

$$\exp A = \mathrm{I}_n \iff A \text{ diagonalisable et } \mathrm{Sp}(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}.$$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable alors

$$A \text{ diagonale} \iff \exp A \text{ diagonale.}$$

Développements

Théorème de Burnside.

Endomorphismes semi-simples.

Cas où $\exp(A)$ est diagonale.

Références

[1] M. Alessandri, *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique*, Dunod, 1999.

[2] T. Dugardin et J. Guégand, *Algèbre en classes préparatoires*, Ellipses, 1999.

[3] X. Gourdon, *Algèbre*, Ellipses, 1994.

[4] J.-E. Rombaldi, *Thèmes pour l'agrégation de mathématiques*, EDP Sciences, 1999.