Application des groupes à la géométrie.

Par Nicolas Lanchier [1]

1 Groupe opérant sur un ensemble.

Définition 1.1 — On dit qu'un groupe G opère sur un ensemble X s'il existe une application $\varphi : G \times X \longrightarrow X$, $\varphi(g, x) = g \cdot x$, telle que

$$\forall\ g, h \in G \qquad \forall\ x \in X \qquad g \cdot (h \cdot x)\ =\ (g \cdot h) \cdot x \qquad \text{et} \qquad e \cdot x\ =\ x$$

où e désigne l'élément neutre de G. [7], Sect. 1.4

Définition 1.2 — On appelle stabilisateur de $x \in X$ l'ensemble noté $S(x)$ des $g \in G$ pour lesquels $g \cdot x = x$. [7], Sect. 1.4

Définition 1.3 — La G-orbite de X est définie par $O(x) = \{\, g \cdot x\,,\ g \in G\,\}$. [7], Sect. 1.4

Définition 1.4 — Un groupe G opère transitivement sur X si X est une G-orbite, i.e.

$$\forall\ x, y \in X \qquad \exists\ g \in G \qquad \text{tel que} \qquad y\ =\ g \cdot x$$

Si de plus g est unique on dira que G opère simplement transitivement sur X. [7], Sect. 1.4

Exemple 1.5 — Un espace affine X attaché à un espace vectoriel$E$ est un ensemble sur lequel le groupe abélien $(E, +)$ agit simplement transitivement. [6], Sect. 3.2

Théorème 1.6 (formule de Burnside) — Soient G un groupe fini opérant sur un ensemble X fini et k le nombre de G-orbites de X. Alors

$$k\ \mathrm{card}(G)\ =\ \sum_{g \in G} \mathrm{card}\,\mathrm{Fix}(g) \qquad \text{où} \quad \mathrm{Fix}(g)\ =\ \{\, x \in X\,,\ g \cdot x = x\,\}$$

[3], Ch. 5

2 Polyèdres réguliers.

Proposition 2.1 — Le groupe $O_3^+(\mathbb{R})$ agit transitivement sur la sphère S^2. [2], Sect. 5.3

Proposition 2.2 — Toute isométrie $g \in O_3^+(\mathbb{R})$, $g \neq \mathrm{id}$, admet exactement deux points fixes x et $-x \in S^2$ appelés pôles de g. [2], Sect. 5.3

Théorème 2.3 — Le groupe $O_3^+(\mathbb{R})$ admet exactement 5 classes de sous-groupes finis :

1. le groupe cyclique $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ des déplacements stabilisant un polygone régulier ;
2. le groupe diédral $D_{n/2}$ des isométries stabilisant un polygone régulier ;
3. le groupe tétraédral $\mathfrak{A}_4$ des déplacements stabilisant le tétraèdre ;
4. le groupe octaédral $\mathfrak{S}_4$ des déplacements stabilisant le cube et l'octaèdre ;
5. le groupe icosaédral $\mathfrak{A}_5$ des déplacements stabilisant le dodécaèdre et l'icosaèdre.

[4], Sect. 1.3

Application 2.4 — Le nombre N de façons de colorier un cube avec k couleurs distinctes est donné par

$$N\ =\ \frac{1}{24}\ (k^6 + 3k^4 + 12k^3 + 8k^2)$$

[5], Sect. 4.3

3 Pavages réguliers du plan.

Définition 3.1 — On appelle pavage du plan euclidien E tout couple (P, G) où P est une partie compacte de E, connexe, d'intérieur non vide et où G est un sous-groupe de $\mathcal{I}s^+(E)$ vérifiant les deux axiomes :

1. $E = \bigcup_{g \in G} g(P)$;
2. $\forall\, g, h \in G, \quad g(\overset{\circ}{P}) \cap h(\overset{\circ}{P}) \neq \varnothing \quad \Longrightarrow \quad g(P) = h(P).$ [8], Sect. 35.2

Définition 3.2 — Un sous-groupe G de $\mathcal{I}s^+(E)$ est un groupe de pavage s'il existe une partie $P \subset E$ telle que (P, G) soit un pavage du plan euclidien. [8], Sect. 35.2

Théorème 3.3 — Soient $A \subset E$ une partie bornée non vide du plan euclidien et $\mathcal{I}s_A(E)$ le groupe des isométries de E conservant globalement A. Alors il existe un point $a \in A$ tel que pour tout $f \in \mathcal{I}s_A(E)$, $f(a) = a$. [8], Sect. 35.1

Théorème 3.4 — Le groupe de pavage G opère discrètement dans E. [1], Sect. 1.7, [8], Sect. 35.3

Théorème 3.5 — Soit $\Gamma = G \cap \mathcal{T}$ le groupe des translations de G. Alors Γ est un réseau, i.e. il existe une base (u, v) de E telle que $\Gamma = \mathbb{Z}\, u + \mathbb{Z}\, v$. [1], Sect. 1.7

Théorème 3.6 — Pour tout $g \in G$, notons $\mathcal{L}(g)$ la partie linéaire de g et $\mathcal{L}(G)$ l'ensemble des $\mathcal{L}(g)$, $g \in G$. Alors $\operatorname{card} \mathcal{L}(G) \in \{ 1, 2, 3, 4, 6 \}$. [1], Sect. 1.7

Définition 3.7 — Deux groupes de pavage G et H sont dits équivalents s'il existe $g \in \mathrm{GA}(E)$ tel que $G = g \cdot H \cdot g^{-1}$. [8], Sect. 35.4

Théorème 3.8 — Les groupes G et H sont équivalents si et seulement si $\operatorname{card} \mathcal{L}(G) = \operatorname{card} \mathcal{L}(H)$. [8], Sect. 35.4

Théorème 3.9 — Il existe exactement cinq classes d'équivalence de groupes de pavage. [8], Sect. 35.4

Références

[1] Marcel Berger. *Géométrie. Tome 1.* Nathan, 1990.

[2] Alain Bouvier, Denis Richard. *Groupes. Observation, théorie, pratique.* Hermann, 1994.

[3] Josette Calais. *Eléments de théorie des groupes.* Puf, 1998.

[4] M. Fetizon, H.P. Gervais, A. Guichardet. *Théorie des groupes et leurs représentations. Application à la spectroscopie moléculaire.* Ellipses, 1987.

[5] Eric Lehman. *Mathématiques pour l'étudiant de première année. Algèbre et géométrie.* Belin, 1984.

[6] Jacqueline Lelong-Ferrand. *Les fondements de la géométrie.* Puf, 1985.

[7] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre.* Ellipses, 1996.

[8] Patrice Tauvel. *mathématiques générales pour l'agrégation.* Masson, 1997.