Algèbre 34 – Utilisation des groupes en géométrie

1. Géométries affine et euclidienne

On note E un espace euclidien de dimension n.

1.1. **Généralités sur les espaces affines.**

Définition. On dit que $\mathcal{E}$ est un *espace affine* si le groupe additif de E agit transitivement et fidèlement sur $\mathcal{E}$.

Les éléments de $\mathcal{E}$ sont des *points* et E est la *direction* de $\mathcal{E}$. L'action de $\vec{u} \in E$ sur $M \in \mathcal{E}$ est notée $M + \vec{u}$.

Proposition. *Pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $\vec{u} \in E$, il existe un unique $N \in \mathcal{E}$ tel que $N = M + \vec{u}$; on note alors $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$ et $N = t_{\vec{u}}(M)$.*

Définition. On dit qu'une application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est *affine* s'il existe $v_f \in \mathcal{L}(E, E')$ telle que $f(M + \vec{u}) = f(M) + v_f(\vec{u})$ pour tous $M \in \mathcal{E}$ et $\vec{u} \in E$.

L'application v_f est unique et est appelée *application linéaire associée à f*.

Remarque. Les *translations* $t_{\vec{u}}$, où $\vec{u} \in E$, constituent un sous-groupe $\mathcal{T}(\mathcal{E})$, isomorphe à E, du groupe des bijections de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.

Définition et proposition. On appelle *groupe affine* et on note $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ le groupe des automorphismes affines de $\mathcal{E}$.

Proposition. *L'application $v : f \mapsto v_f$ est un morphisme surjectif du groupe $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ sur $GL(E)$, de noyau $\mathcal{T}(\mathcal{E})$, et on a $\mathrm{Aut}(\mathcal{E}) \simeq E \rtimes_\alpha GL(E)$ (où α est l'action naturelle de $GL(E)$ sur E).*

1.2. **Isométries vectorielles.**

Définition et proposition. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est une *isométrie*, et on note $u \in \mathcal{O}(E)$, si u vérifie les conditions équivalentes suivantes :

- (i) $u \circ u^* = u^* \circ u = \mathrm{id}_E$
- (ii) $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pour tous $x, y \in E$
- (iii) $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$
- (iv) l'image par u d'une base orthonormale est une base orthonormale

Alors $\mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{SO}(E) = \{u \in \mathcal{O}(E) \ ; \ \det u = 1\}$ sont des groupes pour la composition.

Proposition. *Si $u \in \mathcal{O}(E)$ alors $E = V \oplus W \oplus P_1 \oplus \cdots \oplus P_r$ où les P_i sont des plans, $u_{|V} = \mathrm{id}_V$, $u_{|W} = -\mathrm{id}_W$ et les $u_{|P_i}$ sont des rotations.*

Application. $\mathcal{SO}(E)$ est connexe par arcs.
Les composantes connexes de $\mathcal{O}(E)$ sont $\mathcal{SO}(E)$ et l'ensemble $\mathcal{O}^-(E) = \{u \in \mathcal{O}(E); \det u = -1\}$.

Définition. Soit $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{E})$.
– On dit que f est une *isométrie affine* si $v_f \in \mathcal{O}(E)$.
– On dit que f est un *déplacement* si $v_f \in \mathcal{SO}(E)$.

1.3. **Sous-groupes de $\mathcal{O}(E)$.**

Proposition. *Si G est un sous-groupe compact de $GL(\mathbb{R}^n)$ alors il existe un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ pour lequel tout élément de G est une isométrie.*

Proposition. *Les sous-groupe finis de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ sont $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $D_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Proposition. *Les sous-groupes finis de $\mathcal{SO}(\mathbb{R}^3)$ sont isomorphes à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, D_n, $\mathcal{A}_4$, $\mathcal{S}_4$ ou $\mathcal{A}_5$.*

2. Exemples en dimensions 2 et 3

2.1. **Angles.** Les matrices $A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ sont de la forme

(i) $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ si $A \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, ou

(ii) $\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ si $\det A = -1$.

Une matrice $A \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ s'écrit donc

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Définition. L'*angle* de A est θ modulo 2π.

Remarque. Puisque $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif, la matrice d'une rotation ne dépend pas de la base orthonormale directe choisie. On peut donc parler de l'*angle* d'une rotation.

2.2. **Polygones et polyèdres.**

Définition. On dit qu'une partie compacte d'intérieur non vide $\mathcal{P}$ du plan affine euclidien $\mathcal{E}$ est un *polygone* si $\mathcal{P}$ est l'intersection d'un nombre fini de demi-plans fermés. Si de plus, tous les côtés de $\mathcal{P}$ ont même longueur et tous les angles ont même mesure, on dit que $\mathcal{P}$ est un *polygone régulier*.

Proposition. *Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont deux polygones réguliers à $n \geq 3$ côtés alors il existe une similitude transformant $\mathcal{P}$ en $\mathcal{P}'$.*

Définition et proposition. On appelle *groupe d'un polygone* $\mathcal{P}$ le groupe $\mathrm{Is}_{\mathcal{P}}(\mathcal{E})$ des isométries f de $\mathcal{E}$ telles que $f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$.

Proposition. *$D_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est le groupe du polygone régulier à n côtés.*

Application (colliers de perles)**.** On dispose d'un fil circulaire, de 4 perles bleues, 3 blanches et 2 rouges. Combien de colliers différents peut-on faire avec ce matériel ?

Définition. On dit qu'une partie $\mathcal{P}$ de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ est un *polyèdre convexe* si $\mathcal{P}$ est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points non coplanaires.

Remarque. En particulier, un polyèdre convexe est compact et d'intérieur non vide.

Proposition. *Un polyèdre convexe est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés. Inversement, toute intersection compacte d'intérieur non vide d'un nombre fini de demi-espaces fermés est un polyèdre convexe.*

Définition. On dit qu'un polyèdre convexe est *régulier* si ses faces sont des polygones réguliers isométriques et si, en chaque sommet, les figures formées par la réunion des arêtes y aboutissant sont isométriques.

Proposition. *Il y a cinq types de polyèdres réguliers.*

Définition. On appelle *groupe d'un polyèdre* $\mathcal{P}$ le groupe $\mathrm{Is}_{\mathcal{P}}(\mathcal{E})$ des isométries f de $\mathcal{E}$ telles que $f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$.

Exemple. Le sous-groupe des déplacements du groupe du tétraèdre est $\mathcal{A}_4$, celui du cube est $\mathcal{S}_4$ et celui de l'icosaèdre est $\mathcal{A}_5$.

2.3. **Frises et pavages.** On note $\mathcal{E}$ le plan affine euclidien.

Définition. Une *frise* de $\mathcal{E}$ est une ensemble non vide $\mathcal{F} \neq \emptyset$ tel que $\mathrm{Is}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}) \cap \mathcal{T}(\mathcal{E}) \simeq \mathbb{Z}$ où $\mathrm{Is}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E})$ est le groupe des isométries fixant $\mathcal{F}$.

Proposition. *À conjugaison près dans le groupe des similitudes de $\mathcal{E}$, il y a 7 classes de frises.*

Définition. Un *pavage* de $\mathcal{E}$ est la donnée d'une partie compacte, connexe, d'intérieur non vide $\mathcal{P}$ de $\mathcal{E}$ et d'un sous-groupe G des isométries de $\mathcal{E}$ tels que

$$\mathcal{E} = \bigcup_{g \in G} g(\mathcal{P}) \quad \text{et} \quad g(\mathring{\mathcal{P}}) \cap h(\mathring{\mathcal{P}}) \Rightarrow g(\mathcal{P}) = h(\mathcal{P}).$$

Proposition. *À conjugaison près dans le groupe affine de $\mathcal{E}$, il y a 17 classes de pavages.*

3. Groupes et invariants géométriques

3.1. **Action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré.** On identifie le plan $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{P}$ le demi-plan $\{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Im}\ z > 0\}$ et on considère le *groupe modulaire* $PSL_2(\mathbb{Z}) \simeq SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm \mathrm{I}_2\}$.

Proposition. *$SL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par les matrices*

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition. *L'action de $PSL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathcal{P}$ définie par*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$$

admet pour transversale le domaine $\mathcal{D}_0$ défini par

- *soit* $-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\ z < \frac{1}{2}$ *et* $|z| > 1$,
- *soit* $-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\ z \leq 0$ *et* $|z| = 1$.

Proposition. *À $\mathbb{C}^*$-homothétie près, les réseaux du plan sont en bijection avec $\mathcal{D}_0$.*

3.2. **Groupe fondamental.** On note X et Y deux espaces topologiques.

Définition. Un *chemin* d'origine x et d'arrivée y dans X est l'image d'une application continue $\gamma : [0,1] \to X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Si de plus $x = y$ alors on dit qu'il s'agit d'un *lacet* de base x.

Définition. On dit que deux chemins γ et γ' vérifiant $\gamma(0) = \gamma'(0) = x$ et $\gamma(1) = \gamma'(1) = y$ sont *homotopes* s'il existe $F : [0,1]^2 \to X$ continue telle que

$$\forall t \in [0,1], F(t,0) = c(1) \quad \text{et} \quad F(t,1) = c'(1)$$
$$\forall s \in [0,1], F(0,s) = x \quad \text{et} \quad F(1,s) = y.$$

La relation d'homotopie est une relation d'équivalence dans l'ensemble des chemins joignant x à y.

Définition et proposition. L'ensemble $\pi_1(X, x)$ des classes d'homotopie des lacets de base x est un groupe pour la "composition" des chemins appelé *groupe fondamental* de X en x.

Exemple. $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \simeq \mathbb{Z}$

Proposition. *Si $x \in X$ et $y \in Y$ alors*

$$\pi_1(X \times Y, (x,y)) \simeq \pi_1(X,x) \times \pi_1(Y,y).$$

Développements

Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$.

Groupe des isométries du cube.

Action de $PSL_2(\mathbb{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré.

Références

[1] M. Alessandri, *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique*, Dunod, 1999.

[2] M. Audin, *Géométrie*, Belin, 1998.

[3] F. Combes, *Algèbre et géométrie*, Bréal, 1998.

[4] P. Tauvel, *Mathématiques générales pour l'agrégation*, Masson, 1997.