Analyse 02 – Exemples de parties denses et applications

1. Quelques exemples dans $\mathbb{R}$

1.1. Approximation des réels par des rationnels.

Proposition. *Si $p \geq 2$ et $x \in [0,1[$ alors il existe une unique suite $(\xi_n)_{n\geq 1}$ dans $\{0,\ldots,p-1\}$ telle que $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\xi_n}{p^n}$ et avec $\xi_n \neq p-1$ pour une infinité d'indices.*

Corollaire. *$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Application. L'identité est le seul automorphisme de corps de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1.2. Suites de réels.

Proposition. *Les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont soit denses, soit de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a > 0$.*

Application. L'ensemble $\{e^{2i\pi n\theta}; n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{S}^1$ si et seulement si θ est irrationnel ; en particulier, l'ensemble $\{\sin n; n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[-1,1]$.

On note $\{x\}$ l'unique réel de $[0,1[$ tel que $x - \{x\} \in \mathbb{Z}$.

Définition. $(x_n)_n$ est *équirépartie modulo* 1 si pour tous $0 \leq a < b < 1$, $N(a,b,n) = \operatorname{card}\{m \leq n \,; a \leq \{x_m\} \leq b\}$ est équivalent à $n(b-a)$ quand n tend vers l'infini.

Remarque. Si $(x_n)_n$ est équirépartie modulo 1 alors les $\{x_n\}$ sont denses dans $[0,1[$.

Théorème. *Soit $(x_n)_n$ une suite de réels. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- *(i) $(x_n)_n$ est équirépartie modulo 1*
- *(ii) pour toute fonction 1-périodique Riemann-intégrable f, $\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$*
- *(iii) pour toute fonction 1-périodique continue f, $\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$*
- *(iv) pour tout $m \in \mathbb{Z}$ non nul, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{2i\pi m x_k} = o(n)$*

Exemple. Si $\theta \notin \mathbb{Q}$ alors $(n\theta)_n$ est équirépartie.

2. Complétude et complétion

2.1. Prolongement uniformément continu.

Théorème. *Si (E,d) est un espace métrique alors il existe un espace métrique complet (F,δ) et une application isométrique $j : E \to F$ tels que $j(E)$ soit dense dans F.*

Théorème. *Soit $f : A \to F$ une application uniformément continue d'une partie dense A d'un espace métrique (E,d) dans un espace complet (F,δ). Alors il existe une unique application continue $g : E \to F$ qui prolonge f ; de plus g est uniformément continue.*

Application. Intégrale de Riemann des fonctions réglées

Application. Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{T})$.

2.2. Méthodes hilbertiennes.

Définition et proposition. On dit qu'un système orthonormé $(e_i)_{i\in I}$ est une *base hilbertienne* d'un espace de Hilbert $\mathbb{H}$ s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

- *(i)* $(e_i)_{i\in I}$ est un système orthonormé maximal,
- *(ii)* $\operatorname{Vect}(e_i)_{i\in I}$ est dense dans $\mathbb{H}$ (on dit que $(e_i)_{i\in I}$ est *totale*),
- *(iii)* $\forall x \in \mathbb{H},\ x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i$,
- *(iv)* $\forall x \in \mathbb{H},\ \|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2$,
- *(v)* $\forall x,y \in \mathbb{H},\ \langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle\langle e_i, y\rangle$.

Proposition. *Un espace de Hilbert est séparable si et seulement s'il admet une base hilbertienne dénombrable.*

Exemple. Les fonctions de Hermite H_n forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

Exemple. La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par $e_n(t) = e^{2i\pi nt}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.

Application (séries de Fourier)**.** Soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une suite orthonormée d'un espace de Hilbert H.

- *(i)* $\widehat{x}(n) = \langle x, e_n\rangle$ est appelé $n^{\text{è}}$ *coefficient de Fourier* de $x \in H$
- *(ii)* $\sum \widehat{x}(n)e_n$ est appelée la *série de Fourier* de $x \in H$ relativement à la suite $(e_n)_n$
- *(iii)* la suite $(e_n)_n$ est une base hilbertienne de H si et seulement si tout $x \in H$ est somme de sa série de Fourier *i.e.* $x = \sum_{n\geq 0} \widehat{x}(n)e_n$

Application (Espace de Bergman)**.** L'espace de Bergman du disque unité $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}$ est défini par $\mathrm{A}^2(\Omega) = L^2(\Omega) \cap \mathcal{H}(\Omega)$ et est muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(z)\overline{g(z)}dz$. Alors

- *(i)* $\mathrm{A}^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert,
- *(ii)* $e_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}z^n$ est une base hilbertienne,
- *(iii)* $k(\zeta, z) = \dfrac{1}{\pi(1-\overline{\zeta}z)^2}$ est un noyau reproduisant.

2.3. Quelques applications du théorème de Baire.

Théorème de Baire. *Si (E,d) est un espace métrique complet alors toute intersection dénombrable d'ouverts denses de E est dense dans E.*

Application. Soit (E,d) un espace de Banach sur $\mathbb{C}$ et A un opérateur continu de E.
S'il existe X, Y denses dans E et $B : Y \to Y$ tels que pour tous $x \in X$ et $y \in Y$ on ait $A^n(x) \to 0$, $B^n(y) \to 0$ et $AB(y) = y$, alors il existe $\omega \in E$ tel que $\{A^n(\omega), n \geq 0\}$ soit dense dans E. Cette condition est vérifiée pour

(*i*) la dérivation sur $\mathcal{H}(\mathbb{C})$,

(*ii*) l'opérateur A de ℓ^2 défini par $Ae_0 = 0$ et $Ae_{i+1} = \lambda e_i$ pour $i \geq 0$, où $\lambda > 1$ et $(e_i)_{i\geq 0}$ est une base hilbertienne de $E = \ell^2$.

Application. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable alors f' est continue sur un ensemble dense.

3. Approximation et régularisation

3.1. Régularisation.

Proposition. *Soit f une application à support compact définie sur $\mathbb{R}^n$.*

(*i*) *si f est de classe $\mathcal{C}^k$ et g est intégrable à support compact alors $f \star g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et à support compact*

(*ii*) *si f est continue et $(\rho_n)_n$ est une unité approchée de convolution alors $\|\rho_n \star f - f\|_\infty \to 0$*

(*iii*) *si $f \in L^p$ $(p < +\infty)$ et $(\rho_n)_n$ est une unité approchée de convolution alors $\|\rho_n \star f - f\|_p \to 0$*

Application. Les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sont denses dans $\mathcal{C}^k$ et dans L^p pour $1 \leq p < +\infty$.

Application. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f}$ tend vers 0 à l'infini.

Application. Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ alors $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

3.2. Approximation polynômiale.

Théorème de Stone-Weierstrass. *Soit X un espace compact et A une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ telle que : A sépare les points de X et pour tout $x \in A$ il existe $f \in A$ avec $f(x) \neq 0$. Alors A est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ pour la topologie de la convergence uniforme.*

Application (théorème de Brouwer)**.** Toute application continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même admet un point fixe.

Théorème de Runge. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et soit A un ensemble qui a un point dans chaque composante de $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$.*

(*i*) *On peut approcher f uniformément sur les compacts par une suite de fractions rationnelles dont les pôles sont dans A.*

(*ii*) *Si $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ est connexe alors f est approchable uniformément sur les compacts par une suite de polynômes.*

Application. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ avec $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ connexe et si f est holomorphe sur Ω alors $\int_\gamma f = 0$ pour tout chemin fermé γ dans Ω.

Théorème de Fejer. *Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ et* $\sigma_N(x) = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ikx}$ *alors* $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \|f - \sigma_N\|_\infty = 0$.

Application. Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ alors il existe une unique $u : \overline{\mathbb{B}}(0,1) \to \mathbb{R}$ continue, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{B}(0,1)$ avec $u_{|\mathbb{S}^1} = f$ et $\Delta u = 0$.

Application. La transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ admet les fonctions de Hermite comme base de vecteurs propres associées aux valeurs propres $\{\pm 1, \pm i\}$.

3.3. Équicontinuité.

Proposition. *Soit D une partie dense d'un espace topologique T et soit $\mathcal{H}$ une famille équicontinue d'applications de T dans $\mathbb{C}$. Alors les topologie de la convergence uniforme sur les compacts de T et la topologie de la convergence simple sur D coïncident sur $\mathcal{H}$.*

Application. Soit T un espace métrique compact. Une partie $\mathcal{H}$ de de $\mathcal{C}(T)$ est relativement compacte si et seulement si elle est équicontinue et uniformément bornée.

Développements

Équirépartition modulo 1.

Noyau de Bergman.

Hypercyclicité.

Vecteurs propres de la transformation de Fourier.

Références

[1] F. Bayen et C. Margaria, *Espaces de Hilbert et opérateurs*, Ellipses, 1986.

[2] A. Chambert-Loir, S. Fermigier et V. Maillot, *Exercices d'analyse 1*, Masson, 1997.

[3] S. Gonnord et N. Tosel, *Topologie et analyse fonctionnelle*, Ellipses, 1996.

[4] X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.

[5] A. Kolmogorov, *Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*, Mir Ellipses, 1994.

[6] A. Pommellet, *Cours d'analyse*, Ellipses, 1994.

[7] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Masson, 1995.

[8] H. Queffélec et C. Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2002.