Utilisation de théorèmes de point fixe.

Par Nicolas Lanchier [1]

1 Théorèmes de point fixe.

Définition 1.1 — On appelle point fixe de $f : X \longrightarrow X$ tout élément $\lambda \in X$ tel que $f(\lambda) = \lambda$.

Théorème 1.2 (point fixe) — Soient X un espace complet et $f : X \longrightarrow X$ une application contractante. Alors f admet un unique point fixe. [4], Sect. 1.2

Théorème 1.3 — Soient X un espace complet et $f : X \longrightarrow X$ une application. S'il existe un entier $r \geq 1$ telle que la composée f^r soit contractante alors f admet un unique point fixe. [4], Sect. 1.2

Théorème 1.4 — Soit (X, d) un espace métrique compact. Si pour tous x, $y \in X$, $x \neq y$, $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ alors f admet un unique point fixe $\lambda \in X$. De plus, la suite $(x_n)_{n\geq 0} \subset X$ définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers λ. [4], Sect. 1.3

2 Applications des théorèmes de point fixe en analyse.

Théorème 2.1 (inversion locale) — Soient E et F deux espaces de Banach, Ω un ouvert de E et $f : \Omega \longrightarrow F$ une application de classe C^1. On suppose qu'il existe $a \in \Omega$ tel que df_a soit un isomorphisme bicontinu de E sur F. Alors il existe un voisinage ouvert V de a et un voisinage ouvert W de $f(a)$ tels que

1. la restriction de f à V soit une bijection de V sur W ;
2. l'application inverse $g : W \longrightarrow V$ est continue ;
3. g est de classe C^1 et pour tout $x \in V$, $dg_{f(x)} = df_x^{-1}$.

[4], Sect. 5.3

Théorème 2.2 (Cauchy-Lipschitz) — Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue, localement lipschitzienne en la seconde variable. Alors pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, le problème de Cauchy

$$\partial_t x \;=\; f(t, x) \qquad x(t_0) \;=\; x_0$$

admet une solution unique. [4], Sect. 6.1

Théorème 2.3 (Von Neumann) — Soient H un espace de Hilbert et T un endomorphisme de H de norme ≤ 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$C_n \;=\; \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} T^k$$

$A = \mathrm{Ker}(T - I)$ et $B = \overline{\mathrm{Im}(T - I)}$. Alors

1. $A \oplus B = H$;
2. pour tout $x \in H$, $\lim_{n\to\infty} C_n(x) = \pi(x)$ où π désigne la projection sur A parallèlement à B.

[2], Sect. 2.3

[1] Tout usage commercial, en partie ou en totalité, de ce document est soumis à l'autorisation explicite de l'auteur.

3 Géométrie et topologie de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 3.1 (Brouwer) — Soient D le disque unité de $\mathbb{R}^2$ et $f : D \longrightarrow D$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe. [2], Sect. 1.1

Théorème 3.2 (Schauder) — Soit E un espace de Banach, C un convexe fermé non vide de E et $f : C \longrightarrow C$ une application continue dont l'image $f(C)$ est relativement compacte. Alors f admet un point fixe. [2], Sect. 2.2

Application 3.3 — Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et (t_0, x_0) dans $I \times \Omega$. Soit $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et supposons que

1. pour tout $x \in \Omega$, $t \mapsto f(t,x)$ est mesurable ;
2. pour presque tout $t \in I$, $x \mapsto f(t,x)$ est continue ;
3. pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une fonction intégrable $m_K : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que

$$\forall\, x \in K \qquad \forall\, t \in I \qquad |f(t,x)| \;\leq\; m_K(t)$$

Alors il existe un réel $\eta > 0$ et une application continue y tels que

$$\forall\, t \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \qquad y(t) \;=\; x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$$

[3], Sect. 2.2

Définition 3.4 — On appelle pavage du plan euclidien E tout couple (P, G) où P est une partie compacte de E, connexe, d'intérieur non vide et où G est un sous-groupe de $\mathcal{I}s^+(E)$ vérifiant les deux axiomes :

1. $E = \bigcup_{g \in G} g(P)$;
2. $\forall\, g, h \in G, \quad g(\overset{\circ}{P}) \cap h(\overset{\circ}{P}) \neq \varnothing \quad \Longrightarrow \quad g(P) = h(P).$ [5], Sect. 35.2

Définition 3.5 — Un sous-groupe G de $\mathcal{I}s^+(E)$ est un groupe de pavage s'il existe une partie $P \subset E$ telle que (P, G) soit un pavage du plan euclidien. [5], Sect. 35.2

Théorème 3.6 — Soient $A \subset E$ une partie bornée non vide du plan euclidien et $\mathcal{I}s_A(E)$ le groupe des isométries de E conservant globalement A. Alors il existe un point $a \in A$ tel que pour tout $f \in \mathcal{I}s_A(E)$, $f(a) = a$. [5], Sect. 35.1

Application 3.7 — Le groupe de pavage G opère discrètement dans E. [1], Sect. 1.7, [5], Sect. 35.3

Références

[1] Marcel Berger. *Géométrie. Tome 1.* Nathan, 1990.

[2] Stéphane Gonnord, Nicolas Tosel. *Thèmes d'analyse pour l'agrégation. Topologie et analyse fonctionnelle.* Ellipses, 1996.

[3] Stéphane Gonnord, Nicolas Tosel. *Thèmes d'analyse pour l'agrégation. Calcul différentiel.* Ellipses, 1998.

[4] Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse.* Ellipses, 1994.

[5] Patrice Tauvel. *mathématiques générales pour l'agrégation.* Masson, 1997.