Leçon d'agrégation
Applications des théorèmes de point fixe

Nicolas Lim

1 Premier énoncé

Soit f de $[0,1]$ dans lui même continue, elle admet un point fixe.

2 Fonctions contractantes

On se place dans un espace métrique complet (E,d)

2.1 Définition

Soit $f : E \to E$ on dit que f est contractante si :

$$\exists k \in (0,1),\ \forall (x,y) \in E^2\ d(f(x),f(y)) \leq kd(x,y)$$

2.2 Théorème du point fixe de Banach

Théorème : Toute application contractante d'un espace complet dans lui même admet un unique point fixe x_0. Par ailleurs :

$$\forall x \in E\ \lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x) = x_0$$

Théorème du point fixe à paramètre : Soit F un espace métrique. Soit $f : F \times E \to E$ une application continue et telle que :

$$\exists k \in (0,1),\ \forall \lambda \in F\ \forall (x,y) \in E^2\ d(f(\lambda,x),f(\lambda,y)) \leq kd(x,y)$$

alors $\forall \lambda \in F\ f(\lambda,.)$ admet un unique point fixe. Ce point fixe dépend continuement de λ.

2.3 Théorème d'inversion locale

Le théorème d'inversion locale se démontre à l'aide du théorème de Banach. Par ailleurs il permet à son tour d'améliorer le théorème du point fixe à paramètre. En effet on a le théorème suivant :

Théorème du point fixe à paramètre : Soient E F des espaces de Banach. Soit $f : F \times E \to E$ une application de classe C^k $(k \geq 1)$et telle que :

$$\exists k \in (0,1),\ \forall \lambda \in F\ \forall (x,y) \in E^2\ ||f(\lambda,x) - f(\lambda,y)|| \leq k||x-y||$$

alors $\forall \lambda \in F\ f(\lambda,.)$ admet un unique point fixe. Ce point fixe dépend de façon C^k de λ.

3 Application à la résolution approchée d'équation numérique

3.1 Une première approche

On veut trouver le point fixe d'une fonction numérique contractante : on l'approxime par une suite $(f^{(n)}(x))_{n\in\mathbf{N}}$ dont on sait qu'elle converge exponentiellement vite vers l'unique point fixe.

3.2 La méthode de Newton

On cherche la solution de $f(x) = 0$ où f est une fonction numérique C^1 et on sait que sa dérivée ne s'annule pas : on utilise la méthode précédente avec une fonction adaptée dont la solution est un point fixe hyper actractif.

4 Application à la théorie des EDO

4.1 Cauchy-lipschitz

4.2 Dépendance aux conditions initiales

4.3 Un théorème de stabilité

On considère l'équation suivante :

$$\dot{x} = Ax + g(x), \text{ où } \ x \in \mathbf{R}^n$$

où A est une matrice $n \times n$ constante ayant n valeurs propres sans partie réelle nulle; g est C^k au voisinage de 0 et $o(||x||)$.

Alors il éxiste une C^k-variété W_s qui a même dimension que le nombre de valeurs propres à partie réelle négative. Et telle que si $\exists t$ tel que $x(t) \in W_s$ alors $x \to 0$ exponentiellement vite quand $t \to \infty$. Et $x \to 0$ ssi x est sur W_s au bout d'un certain temps.

5 Invariance de domaine élémentaire

5.1 Théorème

Théorème :

Soit E un espace de Banach, $U \subset E$ ouvert, et $F \ : \ U \to E$ contractante. On appelle champs associé à F : $f(x) = x - F(x)$. f est alors ouverte et est un homéomorphisme de U dans $f(U)$.

Corollaire :

Si $U = E$ alors f est un homéomorphisme de E dans lui-même.

5.2 Application

Théorème : Soit E un espace vectoriel normé non complet et C une partie complète, alors il éxiste un homéomorphisme de $E - C$ dans E qui est l'identité assez loin de C.

6 Théorème de Stampacchia

7 Point fixe de Brouwer et applications

7.1 Enoncé

Soit $f : C \to C$ continue (où C est un convexe compact de $\mathbf{R}^n$) alors f a un point fixe.

On peut démontrer grâce à ce théorème le théorème de Perron-Froebenius :

Soit A une matrice à coefficients positifs stictement, elle admet une unique vecteur propre à coefficients strictement positifs (à un scalaire près) et la valeur propre associée est maximale en module.

Soit l'équation $\dot{x} = f(x)$ dans $\mathbf{R}^n$ ayant une partie V invariante, compacte convexe. Alors l'équation à un point fixe.

Il n'éxiste pas d'application continue de la boule unité fermée de $\mathbf{R}^n$ sur ça frontière.

Champs sortant, champ rentrant... (cf. Chambertloir)

7.2 Théorème de Schauder

Soit $f : C \to C$ compacte (où C est un convexe d'un espace vectoriel normé) alors f a un point fixe.

7.3 Application : le théorème de Lomonosov

Théorème : Soit T un opérateur continue de E evn de dimension infinie. S'il éxiste un opérateur compact K qui commute avec T, T admet un sous-espace invariant fermé non trivial.

7.4 Application de Schauder aux EDO

8 Compléments

Kakutani, Lemme de Bruhat-Tits (cf. Berger)

Références

Brézis, Analyse fonctionnelle
Chamberloir, exo
Coddington and Liviston, EDO
Dugundji, Fixed point theory
Hartmann, EDO
Verhulst, Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems
Smart, Fixed points