Analyse 06 – Utilisation de théorèmes de point fixe

1. Existence d'un point fixe et compacité

1.1. Applications continues.

Théorème de Brouwer. *Toute application continue de $\overline{\mathbb{B}^n}$ dans $\overline{\mathbb{B}^n}$ admet un point fixe.*

Application. Soit $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue telle que $\langle V(x), x\rangle < 0$ pour tout $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ alors il existe $x_0 \in \mathbb{B}^n$ tel que $V(x_0) = 0$.

Application. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est à coefficients positifs alors A admet un vecteur propre à coefficients positifs associé à une valeur propre positive.

Théorème de Schauder. *Soit C un convexe fermé d'un espace normé et $f : C \to C$ une application continue. Si $\overline{f(C)}$ est compact alors f admet un point fixe.*

Application (Cauchy-Arzela-Peano)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : I \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Alors pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \mathcal{U}$, le problème de Cauchy $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, admet au moins une solution locale.

1.2. Famille d'applications continues.

Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$.

Proposition. *Si K est un compact convexe de $\mathbb{R}^n$ tel que $u(K) \subset K$ pour tout $u \in G$, alors il existe $a \in K$ tel que $u(a) = a$.*

Proposition. *Il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ avec $PGP^{-1} \subset \mathcal{O}(n)$.*

1.3. Applications Lipschitziennes.

Proposition. *Soit (E, d) un espace métrique compact et $f : E \to E$ une application telle que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour tous $x, y \in E$ distincts. Alors il existe un unique $a \in E$ tel que $f(a) = a$, obtenu comme limite de la suite $(f^{[n]}(x_0))_{n\geq 0}$ où $x_0 \in E$ est quelconque.*

Remarques. L'application f n'est pas forcément contractante (par exemple sin sur $[0, 1]$). L'hypothèse de compacité est nécessaire (par exemple $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ n'a pas de point fixe sur $\mathbb{R}$).

2. Point fixe d'une application contractante

2.1. Les énoncés.

Soit (E, d) un espace métrique complet.

Théorème de Picard-Banach. *Soit $f : E \to E$ une application contractante. Alors il existe un unique $a \in E$ tel que $f(a) = a$, obtenu comme limite de la suite $(f^{[n]}(x_0))_{n\geq 0}$ où $x_0 \in E$ est quelconque.*

Corollaire. *Soit $f : E \to E$ une application dont une itérée $f^{[p]}$ est contractante. Alors il existe un unique $a \in E$ tel que $f(a) = a$, obtenu comme limite de la suite $(f^{[n]}(x_0))_{n\geq 0}$ où $x_0 \in E$ est quelconque.*

Remarque. La fonction sin n'est pas contractante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ mais admet un point fixe unique. Cependant la suite des itérés converge lentement.

Exemple. On note E l'espace des applications continues $f : [0, 1] \to [0, 1]$ telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ muni de la norme $\| \|_\infty$. Pour tout $f \in E$, on définit $Tf \in E$ par

$$Tf(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}f(3t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2}f(3t-1) + \frac{3}{4} & \text{si } \frac{1}{3} < t \leq \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4}f(3t-2) + \frac{1}{4} & \text{si } \frac{2}{3} < t \leq 1 \end{cases}$$

alors $T : E \to E$ admet un point fixe φ qui est une application continue sur $[0, 1]$ mais nulle part dérivable.

Contre-exemple. L'hypothèse E complet est nécessaire (par exemple $x \mapsto \frac{x+1}{2}$ est contractante sur $[0, 1[$ mais n'a pas de point fixe).

2.2. Application aux équations différentielles.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ une application continue.

Théorème de Cauchy-Lipschitz global. *Si f est globalement Lipschtizienne en la seconde variable alors le problème de Cauchy $y' = f(t, x)$, $y(t_0) = x_0$, admet une unique solution définie sur I.*

Exemple. L'équation $u'' = -\sin u, u(0) = a, u'(0) = b$, admet une unique solution définie sur $\mathbb{R}$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz local. *Si f est localement Lipschtizienne en la seconde variable alors le problème de Cauchy $y' = f(t, x)$, $y(t_0) = x_0$, admet une unique solution maximale.*

2.3. Application au calcul différentiel.

Théorème d'inversion locale. *Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in \mathcal{U}$ tel que $\det J_f(a) \neq 0$. Alors il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ de a et un voisinage $\mathcal{V}$ de $f(a)$ tels que $f : \mathcal{U}' \to \mathcal{V}$ soit un difféomorphisme.*

Corollaire (théorème d'inversion globale)**.** *Soit $f : \mathcal{U} \to f(\mathcal{U})$ de classe $\mathcal{C}^1$ et injective. Si $\det J_f(a) \neq 0$ pour tout $a \in \mathcal{U}$ alors f est un difféomorphisme.*

Corollaire (théorème des fonctions implicites)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$. Si $(a, b) \in \Omega$ vérifie $f(a, b) = 0$ et $\partial_2 f(a, b)$ inversible alors il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U} \subset \Omega$ de (a, b), un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de a et une application $\varphi : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que*

$$f(x, y) = 0 \text{ et } (x, y) \in \mathcal{U} \iff \varphi(x) = y \text{ et } x \in \mathcal{V}.$$

De plus on a $d\varphi_a = -\partial_2 f_{a,b}^{-1} \circ \partial_1 f_{a,b}$.

3. Application à la résolution d'équations

3.1. Famille de points fixes.

Proposition. *Soit E et F deux espaces normés dont le premier est complet et $f : E \times F \to E$ une application continue, contractante en la première variable.*

(i) Pour tout $\lambda \in F$, il existe un unique $x_\lambda \in E$ tel que $f(x_\lambda, \lambda) = x_\lambda$.

(ii) L'application $F \to E, \lambda \mapsto x_\lambda$ est continue.

(iii) *Si $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$, f est $\mathcal{C}^1$ et s'il existe $k < 1$ tel que $\|\partial_1 f(x,\lambda)\| \leq k$ alors l'application $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n, \lambda \mapsto x_\lambda$ est $\mathcal{C}^1$.*

Exemple. Le système

$$x = \frac{1}{2}\sin(x+y) + t - 1 \ , \ y = \frac{1}{2}\cos(x-y) - t + \frac{1}{2}$$

définit deux applications $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ de classe $\mathcal{C}^1$.

3.2. Équations intégrales.

Proposition. *Soit $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux applications continues.*

(i) *Si $\sup\limits_{a \leq s,t \leq b} |K(s,t| < \frac{1}{b-a}$ alors l'équation $x(t) = \varphi(t) + \displaystyle\int_a^b K(s,t)x(s)ds$, pour $t \in [a,b]$, admet une unique solution continue $x : [a,b] \to \mathbb{R}$.*

(ii) *L'équation $x(t) = \varphi(t) + \displaystyle\int_a^t K(s,t)x(s)ds$, pour $t \in [a,b]$, admet une unique solution continue $x : [a,b] \to \mathbb{R}$.*

3.3. Résolution de $f(x) = 0$.

Proposition. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et a un point fixe de f.*

(i) *Si $|f'(a)| < 1$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'intervalle $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ soit stable par f et, pour tout $x_0 \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, $x_n = f^{[n]}(x_0)$ tend vers a. De plus :*
  - *si $f' \neq 0$ sur $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ et $x_0 \neq a$ alors $x_n \neq a$ et $x_{n+1} - a \sim f'(a)(x_n - a)$;*
  - *si f est $\mathcal{C}^2$, $f' = 0$, $f'' \neq 0$ sur $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ et $x_0 \neq a$ alors $x_n \neq a$ et $x_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{2}(x_n - a)^2$.*

(ii) *Si $|f'(a)| > 1$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x_0 \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, $x_n = f^{[n]}(x_0)$ sort de $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ pour n assez grand.*

Proposition (méthode de Newton)**.** *Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ avec $f(c) < 0 < f(d)$ et $f' > 0$ sur $[c,d]$. On pose*

$$x_n = F^{[n]}(x_0) \text{ où } F(t) = t - \frac{f(t)}{f'(t)}.$$

Alors f admet un unique zéro a et il existe un intervalle $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ stable par F tel que, pour tout $x_0 \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, il existe $0 < C < \frac{1}{\varepsilon}$ avec

$$C\,|x_{n+1} - a| \leq (C\varepsilon)^{2^n}.$$

Développements

Deux applications du théorème de Brouwer.

Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$.

Théorème d'inversion locale.

Références

[1] M. Alessandri, *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique*, Dunod, 1999.

[2] P. Donato, *Calcul différentiel pour la licence*, Dunod, 2000.

[3] F. Guénard et H. Lemberg, *Deux applications du théorème du point fixe*, R.M.S. janvier 1998.

[4] A. Pommellet, *Cours d'analyse*, Ellipses, 1994.

[5] F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Cassini, 1999.