Prolongement de fonctions. Exemples.

Par Nicolas Lanchier [1]

1 Prolongement par régularité.

DÉFINITION 1.1 — Soient $f : D \subset X \longrightarrow Y$, a un point d'accumulation de D, $a \notin D$ et supposons que $\lim_{x \to a} f(x) = y_0$. La fonction $g : D \cup \{a\} \longrightarrow Y$ définie par $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in D$ et $g(a) = y_0$ est appelée prolongement par continuité de la fonction f en a.

THÉORÈME 1.2 — Soit X un espace métrique, Y un espace complet, $A \subset X$ une partie dense dans X et $f : A \longrightarrow Y$. Si f est uniformément continue, il existe une unique fonction $g : X \longrightarrow Y$ uniformément continue et prolongeant f. [3], Sect. 1.2

THÉORÈME 1.3 (URYSOHN) — Etant donnés A et B deux fermés disjoints d'un espace compact X, il existe une application continue $f : X \longrightarrow [0,1]$ telle que $f(x) = 0$ pour tout $x \in A$ et $f(y) = 1$ pour tout $y \in B$.

THÉORÈME 1.4 — Soient $I =]\,a, b\,[$ un intervalle réel et (x, I) une solution de l'équation

$$\partial_t\, x \ = \ f(t, x(t)) \qquad \text{(ED)}$$

S'il existe $\varepsilon > 0$ tel que x soit bornée sur $]a, a + \varepsilon]$ alors x peut être prolongée à gauche de a en une solution de (ED). [5], Sect. 10.3

2 Prolongement analytique.

THÉORÈME 2.1 (PRINCIPE DES ZÉROS ISOLÉS) — Soient Ω un ouvert connexe du plan complexe et f une fonction analytique dans Ω. Si f n'est pas identiquement nulle alors l'ensemble $Z(f)$ des zéros de f n'admet pas de point d'accumulation dans Ω. [4], Sect. 10.4

THÉORÈME 2.2 (PROLONGEMENT ANALYTIQUE) — Soient Ω un ouvert connexe du plan complexe, f et g deux fonctions analytiques dans Ω. Si l'ensemble $Z = \{\, z \in \Omega\,,\ f(z) = g(z)\}$ admet un point d'accumulation alors $f \equiv g$ sur Ω.

APPLICATION 2.3 — Soit f une fonction analytique dans un ouvert $U \subset \mathbb{R}$. Alors il existe un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, contenant U et tel que f admette un prolongement analytique dans Ω.

PROPOSITION 2.4 (PROLONGEMENT DE LA FONCTION Γ) — La fonction Γ définie par

$$\Gamma(t) \ = \ \int_0^{+\infty} x^{t-1}\, e^{-x}\, dx \qquad \forall\ t > 0$$

admet un prolongement analytique dans l'ouvert $\Omega = \{\, z \in \mathbb{C}\,,\ \mathrm{Re}(z) > 0\,\}$. [5], Sect. 9.2

DÉFINITION 2.5 — Soient Γ le cercle d'incertitude de la série entière

$$f(z) \ = \ \sum a_n\, z^n$$

et D son disque de convergence. Un élément $a \in \Gamma$ est dit régulier s'il existe un disque ouvert D_a centré en a tel que f admette un prolongement analytique sur $D \cup D_a$, singulier dans le cas contraire. [5], Sect. 3.4

THÉORÈME 2.6 — L'ensemble des points singuliers d'une série entière de rayon de convergence $R < +\infty$ est non vide. [5], Sect. 3.4

3 Théorèmes de Hahn-Banach.

Théorème 3.1 (Hahn-Banach, forme analytique) — Soient $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application positivement homogème vérifiant l'inégalité triangulaire, i.e.

$$\forall\, x, y \in E \qquad \forall\, \lambda > 0 \qquad p\,(\lambda x) \;=\; \lambda\, p\,(x) \quad \text{et} \quad p\,(x+y) \;\leq\; p\,(x) + p\,(y)$$

$G \subset E$ un sous-espace vectoriel et $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que

$$\forall\, x \in G \qquad g(x) \;\leq\; p\,(x)$$

Alors il existe une forme linéaire f définie sur E, prolongeant g, et telle que $f(x) \leq p\,(x)$ pour tout $x \in E$. [1], Sect. 1.1

Théorème 3.2 (Hahn-Banach, forme géométrique) — Soient A et B deux parties disjointes, convexes et non vides d'un espace vectoriel normé E. Si A est fermée et B compacte, il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict. [1], Sect. 1.2

Corollaire 3.3 — Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel dense dans E. Alors toute forme linéaire $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ nulle sur F est nulle sur E. [1], Sect. 1.2

Application 3.4 — Pour tout $a > 1$, notons f_a la fonction définie par

$$f_a(x) \;=\; \frac{1}{x-a} \qquad x \in [0,1]$$

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels strictement supérieurs à 1 et de limite $+\infty$. Alors l'espace vectoriel $V = \mathrm{vect}(f_{a_n}\,,\, n \geq 0)$ est dense dans $C([0,1],\mathbb{R})$. [2], Sect. 2.1

4 Prolongements en théorie de la mesure et de l'intégration.

Théorème 4.1 — Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, $\mathcal{F}^*$ l'ensemble des parties $E \subset \Omega$ pour lesquelles il existe $A,\, B \in \mathcal{F}$ tels que $A \subset E \subset B$ et $\mu(B \setminus A) = 0$, et μ^* l'application définie par $\mu^*(E) = \mu(A)$. Alors $\mathcal{F}^*$ est une tribu et μ^* une mesure sur $\mathcal{F}^*$. [4], Sect. 1.8

Théorème 4.2 (Plancherel) — A toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ on peut associer une fonction $\hat{f}$ dans $L^2(\mathbb{R})$ vérifiant les propriétés suivantes

1. si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ alors $\hat{f}$ coïncide avec la transformée de Fourier de f ;
2. pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\|\,\hat{f}\,\|_2 = \|\,f\,\|_2$;
3. l'application $f \mapsto \hat{f}$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$.

[4], Sect. 9.3

Références

[1] Haïm Brézis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Dunod, 1999.

[2] Stéphane Gonnord, Nicolas Tosel. *Thèmes d'analyse pour l'agrégation. Topologie et analyse fonctionnelle.* Ellipses, 1996.

[3] Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse.* Ellipses, 1994.

[4] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe.* Masson, 1995.

[5] Claude Zuily, Hervé Queffélec. *Eléments d'analyse pour l'agrégation.* Masson, 1995.