Leçon d'agrégation
Prolongement de fonctions : exemples

Nicolas Lim

Soient E et F deux ensembles et $A \subset E$ si on se donne une fonction $f : A \to F$ peut on définir $\widetilde{f}$ qui prolonge f à E tout entier (i.e. telle que $\widetilde{f}$ soit définie sur E tout entier et égale à f sur A)? La réponse est oui : il suffit de définir arbitrairement $\widetilde{f}$ sur $E \backslash A$. Mais cependant on voit que ce prolongement n'a pas d'intérêt dans la mesure où il est arbitraire. Le but du prolongement de fonctions est de conserver certaines propriétés de la fonction à prolonger : continuité, diffrentiabilité... et parfois de s'assurer de l'unicité d'un tel prolongement.

1 Conservation de la continuité

1.1 Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{Q} \cap [0,1]$ par :

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \text{ si } x \leq \tfrac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 1 \text{ sinon} \end{aligned}$$

cette fonction est continue sur $\mathbf{Q} \cap [0,1]$ mais n'est pas prolongeable continuement à $[0,1]$.

1.2 Prolongement continue

Théorème : Soient E et F deux espace métriques et $A \subset E$ soit $f : A \to F$ uniformément continue si F est complet , il éxite une unique $\widetilde{f}$ qui prolonge f à $\overline{A}$ continuement.

Une application de ce théorème est le théorème de Plancherel qui premet de définir la transformée de fourier d'une fonction de L^2 et de prouver la formule de fourier inverse dans cet espace.

1.3 Théorèmes de Tietze et Urysohn

Lemme d'Uryshon :
Soit X un espace normal, A et B deux sous-espaces fermés disjoints de X. Il éxiste une fonction continue sur X à valeur dans $[0,1]$ telle que $f(A) = 0$ et $f(B) = 1$.

Théorème de prolongement de Tietze :
Soit X un espace normal, F un fermé de X et $f \in C(F, [a,b])$ alors il existe $\tilde{f} \in C(X, [a,b])$ qui prolonge f.

Théorème de plongement d'Urysohn :
Soit X espace normal qui admet une base dénombrable d'ouverts, alors X est homéomorphe à un sous-espace de $l^2(\mathbf{R})$ et donc est métrisable.

2 Hahn-Banach

Théorème : Soit E un espace vectoriel réel. Soit p fonction de E dans $\mathbf{R}$ telle que :

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \ \forall x \in E \text{ et } \forall \lambda \geq 0$$
$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \ \forall (x,y) \in E^2.$$

Soit f forme linéaire sur un sous-espace de E dominée par p, f peut être prolongée à E par $\tilde{f}$ linéaire et dominée par p.

Théorème : Soit F un sous-espace fermé d'un espace vectoriel réel E et f une forme linéaire continue sur F alors on peut la prolonger en une forme linéaire sur E qui a même norme.

3 Prolongement conservant des propriétés différentielles

3.1 Equations différentielles

Théorème : Les intervalles maximaux d'une équation différentielle

$$x' = f(t,x)$$

où f est C^1 sont ouverts.

3.2 Problème de Dirichlet

On se place dans D disque de centre 0 et de rayon 1. Le problème de Dirichlet consiste à trouver étant donnée une fonction f sur le cercle une fonction u continue sur D et C^2 dans à l'intérieur de D et vérifiant :

$$\begin{aligned} \Delta(u) &= 0 \text{ à l'intérieur du disque} \\ u_{|\partial D} &= f \end{aligned}$$

La réponse au problème est donnée par la formule de Poisson. Soit f continue sur le cercle, l'unique solution au problème de Dirichlet est:

$$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta - t) + r^2} f(t) dt$$

4 Prolongement analytique

4.1 Mise en place du problème

Etant donnée f analytique dans un domaine D peut on trouver $\tilde{f}$ analytique qui prolonge f sur un domaine contenant D? Ce n'est pas toujours possible :

$$g(z) = \sum_{n \in \mathbf{N}} \sum_{m \wedge n = 1} \frac{1}{z - e^{\frac{2i\pi m}{n}}}$$

est analytique dans le disque unité mais n'est pas prolongeable analytiquement.

4.2 Monodromie

Supposons (f, D) prolongeable le long de toute courbe incluse dans un Ω contenant D et partant du centre de D.

Si Γ_0 et Γ_1 sont Ω-homotopes de α à β où α est le centre de D alors les prolongements le long de Γ_0 et de Γ_1 coincident.

Si de plus Ω est simplement connexe alors f est prolongeable à Ω.

4.3 Exemples

On peut prolonger analytiquement $\frac{1}{\Gamma}$ et ξ dans $\mathbf{C}$ tout entier.

5 Prolongement de probabilités

Théorème de Carathéodory :

Soit A une algèbre munie d'une probabilité μ. Cette probabilité est prolongeable de façon unique à $\sigma(A)$.

Théorème de Kolmogorov: Soit E espace métrique compact soit T un ensemble d'indices. Si pour toute partie finie F de T on possède une probabilité μ_F sur E^F et si ces probabilités sont compatibles (i.e. si $F \subset G$ alors μ_F est l'image par la projection canonique sur E^F de μ_G), alors il éxiste une unique probabilité sur E^T dont les projections sur les E^F soient les μ_F.

Applications : probabilité en percolation, existence du mouvement brownien...

Références

Rudin, Analyse rélle et complexe
Simmons,Topology and modern analysis
Billingsley, Measure and probability
Zully-Queffelec, Analyse pour l'agrégation (?)
Hille, Complex analysis