Analyse 10 – Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés. Exemples et applications.

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E, F, G désignent des e.v.n. et T est une application linéaire de E dans F.

1. Généralités

Définition. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(*i*) T est continue sur E

(*ii*) T est continue en 0

(*iii*) T est uniformément continue

(*iv*) T est Lipschitzienne

(*v*) T est bornée sur la sphère unité $\mathbb{S}$

(*vi*) T est bornée sur la boule unité fermée $\mathbb{B}$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F (et $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$).

Exemple. $L^1 \to L^1, f \mapsto \widehat{f}$ est continue.

Exemple. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\left\|\sum a_i X^i\right\| = \max |a_i|$ alors $T : P \mapsto P'$ n'est pas continue.

Remarque. Si E est de dimension finie alors toute application linéaire de E dans F est continue. Sinon, il existe toujours une application linéaire non continue.

Proposition. *$\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel ; de plus, si $S \in \mathcal{L}(F, G)$ alors $|||S \circ T||| \leq |||S||| \cdot |||T|||$.*

Proposition. *On définit une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$ par*

$$\begin{aligned} |||T||| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \inf\{c > 0; \forall x, \|T(x)\| \leq c\,\|x\|\} \end{aligned}$$

Exemple. Soit $E = L^p$ muni de $\| \ \|_p$, $g \in E$ fixée et $T(f) = \int fg$ alors $|||T||| = \|g\|_q$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Exemple. Soit $E = c_0$ muni de $\| \ \|_\infty$ et $T(u) = \sum \frac{u_n}{2^{n+1}}$ alors $|||T||| = 1$ mais cette norme n'est pas atteinte.

Exemple. Si $E = \mathbb{R}^n$ est muni de la norme $\| \ \|_2$ alors la norme induite sur $\mathcal{L}(E)$ est donnée par $|||T|||_2 = \sqrt{\rho(T^*T)}$.

Application. Si $|||T||| < 1$ alors $\mathrm{id} - T$ est inversible d'inverse $\sum T^n$.

Proposition. *Si F est complet alors $\mathcal{L}(E, F)$ est complet pour $||| \ |||$.*

Exemple. Le dual $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ de E est complet.

2. Dualité et formes linéaires

On suppose ici que T est une forme linéaire sur E.

Proposition. *On a équivalence entre*

(*i*) *T est continue,*

(*ii*) *$\ker T$ est fermé,*

(*iii*) *$E \setminus \ker T$ n'est pas connexe par arcs.*

Remarque. Si $T \in E'$ alors $d(x, \ker T) = \frac{|T(x)|}{|||T|||}$.

Théorème de Hahn-Banach (version analytique)**.** *Soit M un sous-espace de E et $\varphi \in M'$. Alors il existe $T \in E'$ qui prolonge φ et telle que $|||T||| = |||\varphi|||$.*

Application. Soit M un sous-espace fermé de E et $x_0 \notin E$. Il existe $T \in E'$ nulle sur M et telle que $|||T||| = 1$ et $d(x_0, M) = T(x_0)$.

Application. Un sous-espace M de E est dense si et seulement si tout $\varphi \in E'$ nulle sur M est identiquement nulle.

Application. $\|x\| = \sup\limits_{|||T||| \leq 1} \|T(x)\|$

Il s'ensuit que E est isométrique à un sous-espace de E''.

Théorème de Hahn-Banach (version géométrique)**.** *Soit M un sous-espace de E et A un ouvert convexe non vide de E tel que $M \cap A = \emptyset$. Alors il existe un hyperplan linéaire fermé H de E tel que $M \subset H$ et $H \cap A = \emptyset$.*

Corollaire. *Soit A un convexe fermé de E et K un convexe compact de E tels que $A \cap K = \emptyset$. Alors il existe $T \in E'$ telle que : $\sup\limits_{x \in K} \mathrm{Re}\ T(x) < \inf\limits_{y \in A} \mathrm{Re}\ T(y)$.*

Corollaire. *Soit K une partie compacte de E. Alors $x \in E$ est adhérent à l'enveloppe convexe de K si et seulement si pour tout $T \in E'$, on a : $\mathrm{Re}\ T(x) \leq \sup\limits_{y \in K} \mathrm{Re}\ T(y)$.*

Application. L'enveloppe convexe de $\mathcal{O}(n)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la boule unité pour $||| \ |||_2$.

Définition. On dit qu'une suite $(x_n)_n$ de E converge *faiblement* vers x si $\ell(x_n) \to \ell(x)$ pour tout $\ell \in E'$.
On dit qu'une suite $(\ell_n)_n$ de E' converge *faiblement-$\star$* vers ℓ si $\ell_n(x) \to \ell(x)$ pour tout $x \in E$.

Théorème de Banach-Alaoglu. *Si E est séparable alors la boule unité fermée de E' est faiblement-$\star$ compacte.*

3. Cas des espaces de Banach

Théorème de Banach-Steinhaus. *Si E est de Banach et si $(f_i)_{i \in I}$ est dans $\mathcal{L}(E, F)$ et vérifie $\sup\limits_{i \in I} \|f_i(x)\| < \infty$ pour tout $x \in E$, alors $\sup\limits_{i \in I} |||f_i||| < \infty$.*

Application. Si une suite $(x_n)_n$ de E tend faiblement vers x alors $(x_n)_n$ est fortement bornée et $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

Application. Il existe une fonction continue dont la série de Fourier diverge en 0.

Théorème de l'application ouverte. *Si E et F sont de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est surjective alors T est ouverte.*

Remarque. L'hypothèse de complétude est nécessaire : prendre $E = \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ normé par $\| \ \|_\infty$ et l'application linéaire continue bijective $(u_n)_n \mapsto (\frac{u_n}{n})_n$ (de norme 1).

Corollaire (Banach)**.** *Si E et F sont de Banach et $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective alors $T^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$.*

Corollaire (graphe fermé)**.** *Si E et F sont de Banach et si le graphe de T est fermé alors $T \in \mathcal{L}(E,F)$.*

Application. Soit F un sous-espace fermé d'un espace de Banach, on a équivalence entre :

(i) F possède un supplémentaire fermé

(ii) il existe une projection continue de E sur F

Application. $L^1([0,2\pi]) \to c_0(\mathbb{Z}), f \mapsto (\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est continue, injective, de norme 1 mais n'est pas surjective.

4. Cas des espaces de Hilbert

On note H un espace de Hilbert.

4.1. Théorème de Riesz.

Théorème de Riesz. *Pour tout $T \in H'$, il existe $a \in H$ unique tel que $T = \langle a, \cdot \rangle$. De plus, on a $|||T||| = \|a\|$.*

Exemple. $g \mapsto \int fg$ est une isométrie de L^2 sur L^2.

Application. Dual de L^p en mesure finie pour $1 < p < 2$.

Application. Définition de l'adjoint T^* de T.

4.2. Opérateurs compacts.

Définition. On dit que $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est un *opérateur compact* si l'image par T de la boule unité fermée de E est relativement compacte dans F.

Exemple. Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$ et $K : [0,1]^2 \to \mathbb{C}$ continue, on pose $T(f)(x) = \int_0^1 K(x,t)f(t)dt$ alors T est un opérateur compact.

Exemple. Si H est séparable et si $T \in \mathcal{L}(H)$ est tel qu'il existe une base orthonormée $(e_n)_n$ de H vérifiant $\sum \|T(e_n)\|^2$ converge, alors T est un opérateur compact.

Contre-exemple. Soit $E = \ell^2$ et $T((x_n)_n) = (y_n)_n$ où $y_m = \sum \frac{x_n}{n+m}$ alors T n'est pas un opérateur compact.

Proposition. *Si H est séparable alors $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur compact si et seulement si $\|T(x_n)\| \to 0$ pour toute suite $(x_n)_n$ tendant faiblement vers 0.*

Proposition. *Tout opérateur compact sur H est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini.*

Proposition (alternative de Fredholm)**.** *Si T est un opérateur compact sur H alors $S = \mathrm{id} - T$ est injectif si et seulement si S est surjectif.*

Application. Étude de l'équation intégrale de Fredholm.

4.3. Analyse de Fourier dans L^2.

$\longrightarrow$ Vecteurs propres de la transformation de Fourier

---

Développements

Caractérisation de la continuité d'une forme linéaire.

Enveloppe convexe de $\mathcal{O}(n)$.

Dual de L^p.

Vecteurs propres de la transformation de Fourier.

Références

[1] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Dunod, 1999.

[2] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Dunod, 1998.

[3] Y. Sonntag, *Topologie et analyse fonctionnelle*, Ellipses, 1998.

[4] H. Queffélec et C. Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2002.