

Leçon d'agrégation

Utilisation de la dimension finie en analyse

Nicolas Lim

On travaillera toujours sur des espaces vectoriels réels.

1 Théorèmes de base

1.1 Notion de dimension : bases

Tout espace vectoriel de dimension finie admet des bases (de taille la dimension).

Exemple : Les nombres algébriques forment un sous corps de $\mathbf{R}$.

Exemple : Bases de Haar

Dans un espace de probabilité (Ω, A, P) , une suite croissante de sous tribues $(B_n, n \in \mathbf{N})$ est appelée système de Haar si B_n est engendrée par une partition de Ω en $n + 1$ événements de probabilité non nulle. On construit alors une base de Haar sur $(B_n, n \in \mathbf{N})$.

Théorème : Toute base orthonormale $(U_n, n \in \mathbf{N})$ d'un $\mathbf{L}^2$ telle que $U_0 = 1$ et $\forall n \mathbf{E}^{B_n}(U_{n+1}) = 0$ si $B_n = \sigma(U_0, \dots, U_n)$ est nécessairement une base de Harr.

1.2 Le théorème de Riesz

Théorème : La boule unité fermée d'un evn E est compacte ssi E alors F de dimension finie.

Une première application : Soit F est ss-ev strict de $C^1([0, 1], \mathbf{R})$ fermé est de dimension finie.

1.3 Equivalence des normes

Toutes les normes sont équivalents en dimension finie. Ce n'est plus le cas en dimension infini.

Exemple : Tout Banach de dimension infinie $(E, ||.||)$ peut être muni d'une norme non complète continue par rapport à $||.||$.

2 Le théorème de Brouwer

2.1 Énoncé

Toute fonction continue de V dans lui-même admet un point fixe si V est un compact convexe d'un evn de dimension finie.

2.2 Théorème de KKM

Définition : E un ev A est dit finiment fermé si son intersection avec tout ss-ev de dimension finie est fermé dans cet ss-ev.

Soit X inclus dans E , $G : X \rightarrow 2^E$ est dite KKM si $\forall x_1, \dots, x_n$ de X^N l'enveloppe convexe de $x_1, \dots, x_n$ est dans $\bigcup G(x_i)$.

Si $\forall x \in X$ $G(x)$ est finiment fermé alors $\{G(x) | x \in X\}$ possède la propriété d'intersection finie.

Application : Soit X et Y deux compacts convexes non vide de E et F evt. Soit $f : X \times Y \rightarrow \mathbf{R}$ telle que

- $y \rightarrow f(x, y)$ est sci et quasi convexe
- $x \rightarrow f(x, y)$ est scs et quasi concave

alors

$$\max_x \min_y f(x, y) = \min_y \max_x f(x, y)$$

3 Opérateur compact

3.1 Définitions et propriétés

Soit E et F deux Banachs, on dit que $T : E \rightarrow F$ est dit compact si l'image de toute boule de E est relativement compact.

T est compact ssi T^* est compact.

Si T est compact, il est limite uniforme d'applications de rang fini (application : démonstration du théorème de Schauder).

Théorème : Soit T compact de E dans lui-même :

- $\ker(I - T)$ est de dimension finie
- $\Im(I - T)$ est fermée et $\Im(I - T) = \ker(I - T^*)^\perp$
- $\ker(I - T) = \{0\} \iff \Im(I - T) = E$
- $\dim \ker(I - T) = \dim \ker(I - T^*)$

3.2 Opérateurs compacts autoadjoints

Ici on travaille dans H espace Hilbert. On dit que T est autoadjoint s'il est son propre adjoint.

Théorème : H admet alors une base Hilbertienne de vecteurs propres de T . De plus si λ est valeur propre non nulle alors elle est ponctuelle et l'espace propre associé est de dimension finie.

Application : états propres des Hamiltoniens en mécanique quantique.