Analyse 13 – Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

1. Définitions

On note $\mathbb{H}$ un espace préhilbertien non réduit à $\{0\}$, de norme $\| \ \|$ associée à un produit scalaire $\langle \ , \ \rangle$.

Définition. On appelle *système orthonormée* toute famille $(e_i)_{i\in I}$ telle que $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$ pour tous $i, j \in I$.

Proposition. *Si $(e_i)_{i\in I}$ est un système orthonormé alors pour tout $x \in \mathbb{H}$, on a $\sum\limits_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$.*

Définition. La famille $(\xi_i)_{i\in I}$ définie par $\xi_i = \langle x, e_i\rangle$ est appelée famille des *coefficients de Fourier* de x par rapport à $(e_i)_{i\in I}$.

Proposition (Gram-Schmidt)**.** *Tout système libre dénombrable s'orthonormalise.*

Définition. Soit $(e_i)_{i\in I}$ un système orthonormé. On dit que $(e_i)_{i\in I}$ est une *base hilbertienne* s'il s'agit d'un système orthonormé maximal.

Proposition. *Soit $(e_i)_{i\in I}$ un système orthonormé. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *(i)* $(e_i)_{i\in I}$ *est une base hilbertienne,*
- *(ii)* $\mathrm{Vect}(e_i)_{i\in I}$ *est dense dans $\mathbb{H}$ (on dit que $(e_i)_{i\in I}$ est totale),*
- *(iii)* $\forall x \in \mathbb{H},\ x = \sum\limits_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i$,
- *(iv)* $\forall x \in \mathbb{H},\ \|x\|^2 = \sum\limits_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2$,
- *(v)* $\forall x, y \in \mathbb{H},\ \langle x, y\rangle = \sum\limits_{i\in I} \langle x, e_i\rangle\langle e_i, y\rangle$.

Proposition. *Tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne.*

Corollaire. $\mathbb{H}$ *admet une base hilbertienne dénombrable si et seulement si $\mathbb{H}$ est séparable.*

Exemple. L'espace $\mathcal{C}$ des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues a-périodiques, muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)g(x)dx$, admet pour base hilbertienne la famille : $1, \sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{a}x, \sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{a}x, \dots, \sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{a}nx, \sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{a}nx, \dots$

Exemple. L'espace $\ell^2(\mathbb{N})$ muni du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} x_i\overline{y_i}$ admet pour base hilbertienne la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où la suite e_n est nulle sauf le n-è terme qui vaut 1.

Proposition. *Tout espace de Hilbert séparable est isométrique à $\ell^2(\mathbb{N})$.*

2. L'espace L^2 : quelques exemples de bases hilbertiennes

Exemple. Les polynômes de Laguerre, définis sur $]0, +\infty[$ par $L_n(x) = \dfrac{e^x}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$, forment une base hilbertienne de $L^2(]0, +\infty[, e^{-x}dx)$.

Exemple. Une base hilbertienne de $L^2(]0, 1[, dx)$ est donnée par la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où $e_n(x) = e^{2i\pi nx}$.

Application (théorie L^2 des séries de Fourier)**.** Pour tout $f \in L^2(]0, 1[)$, on note $c_n(f) = \int_0^1 f(x)e^{-2i\pi nx}dx$, alors $f = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n$ au sens L^2.

Exemple. Les polynômes de Legendre, définis sur $[-1, 1]$ par $P_n(x) = \dfrac{d^n}{dx^n}((x^2 - 1)^n)$, forment une base hilbertienne de $L^2([-1, 1], dx)$.

Exemple. Les polynômes de Hermite, définis sur $\mathbb{R}$ par $P_n(x) = e^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$, forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx)$.

Application. Les fonctions de Hermite définies par

$$h_n(x) = \frac{P_n(x)e^{-x^2/2}}{\left\|P_n(x)e^{-x^2/2}\right\|_{L^2}}$$

sont les fonctions propres de la transformation de Fourier $\mathcal{F} : L^2 \to L^2$ associées aux valeurs propres $\pm\sqrt{2\pi}$, $\pm i\sqrt{2\pi}$.

Exemple. Les polynômes de Tchebitchef, définis sur $[-1, 1]$ par $T_0(x) = \sqrt{\dfrac{1}{\pi}}$ et $T_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cos(n\mathrm{Arccos}x)$, forment une base hilbertienne de $L^2([-1, 1], \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}})$.

Exemple. Les fonctions de Haar, définies sur $[0, 1]$ par $H_0 = 1$ et, pout tout $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leq k \leq 2^n$, $H_{2^n+k-1}(x) = \sqrt{2^n}$ si $(2k-2)2^{-n-1} < x < (2k-1)2^{-n-1}$, $-\sqrt{2^n}$ si $(2k-1)2^{-n-1} < x < (2k)2^{-n-1}$ et 0 sinon, forment une base hilbertienne de $L^2([0, 1], dx)$.

Application. Si f est continue alors $\sum\limits_{p\in\mathbb{N}} \langle f, H_p\rangle H_p$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

3. Applications

3.1. **Noyau de Bergman.** On note Ω un ouvert strict de $\mathbb{C}$ et $\mathbb{D}$ le disque unité.

Définition. L'*espace de Bergman* sur Ω est défini par $\mathrm{A}^2(\Omega) = L^2(\Omega) \cap \mathcal{H}(\Omega)$ et est muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(z)\overline{g(z)}dz$.

Proposition. $\mathrm{A}^2(\Omega)$ *est un espace de Hilbert.*

Proposition. *Une base hilbertienne de $\mathrm{A}^2(\mathbb{D})$ est donnée par $e_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}z^n$.*

Remarque. On en déduit une base hilbertienne de $\mathrm{A}^2(\Omega)$ pour Ω simplement connexe : $E_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\varphi(z)^n\varphi'(z)$ où $\varphi : \Omega \to \mathbb{D}$ est un biholomorphisme.

Définition. Le *noyau de Bergman* sur $\mathbb{D}$ est l'application k définie pour $\zeta, z \in \mathbb{D}$ par $k(\zeta, z) = \dfrac{1}{\pi(1 - \overline{\zeta}z)^2}$.

Remarque. On en déduit l'expression du noyau de Bergman sur Ω simplement connexe :

$$K(\zeta, z) = \overline{\varphi'(\zeta)}\varphi'(z)k(\varphi(\zeta), \varphi(z))$$

où $\varphi : \Omega \to \mathbb{D}$ est un biholomorphisme.

Application. Si K est construit sur Ω simplement connexe alors on peut expliciter les biholomorphismes de Ω sur $\mathbb{D}$.

3.2. **Opérateurs compacts.**

Définition. On dit que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ est un *opérateur compact* si l'image par T de la boule unité de $\mathbb{H}$ est relativement compacte.

Proposition. *Si $\mathbb{H}$ est séparable et T est autoadjoint compact alors $\mathbb{H}$ admet une base hibertienne formée de vecteurs propres de T.*

Définition. On dit que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ est un *opérateur de Hilbert-Schmidt* s'il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{H}$ telle que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Te_n\|^2$ converge.

Proposition. *Tout opérateur de Hilbert-Schmidt est compact.*

Proposition. *Si $L^2(X, \mu)$ est séparable alors T est de Hilbert-Schmidt si et seulement s'il existe $k \in L^2(X\times X)$ tel que, pour tout $f \in L^2(X)$ et tout $x \in X$, on ait $Tf(x) = \int_x f(y)k(x, y)dy$.*

Développements

Polynômes de Hermite et application.

Noyau de Bergman.

Références

[1] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Dunod, 1999.

[2] A. Chambert-Loir et S. Fermigier, *Exercices d'analyse 3*, Dunod, 1996.

[3] F. Hirsch et G. Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle*, Dunod, 1999.

[4] G. Lacombe et P. Massat, *Analyse fonctionnelle*, Dunod, 1999.

[5] F. Bayen et C. Margaria, *Espaces de Hilbert et opérateurs*, Ellipses, 1986.

[6] A.N. Kolmogorov, *Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*, Ellipses, 1994.