Analyse 27 – Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.

1. Continuité

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$.

1.1. Généralités.

Définition. On dit que f est continue en $a \in A$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \, (|x-a| < \alpha, x \in A) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

f est continue *sur* A si f est continue en tout $a \in A$.

Proposition. *f est continue en $a \in A$ si et seulement si, pour tout suite $(x_n)_n$ de A qui tend vers a, la suite $(f(x_n))_n$ tend vers $f(a)$.*

Exemples. Les fonctions $x \mapsto x^n, n \geq 0$ sont continues. Toute fonction $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ est continue.

Contre-exemple. $\chi_{\mathbb{Q}}$ n'est continue nulle part

Proposition. *L'ensemble $C^0(A)$ des fonctions $A \to \mathbb{R}$ continues sur A est une $\mathbb{R}$-algèbre.*

Exemple. Les fonctions polynômiales sont continues.

Proposition. *Si f est continue sur A et si g est continue sur $f(A)$ alors $g \circ f$ est continue sur A.*

Exemple. Si f est continue alors $|f|$ est continue.

Définition. Soit $A \supset B$. On dit qu'une fonction continue $g : B \to \mathbb{R}$ est prolongeable par continuité sur A s'il existe une fonction continue $f : A \to \mathbb{R}$ telle que $f(b) = g(b)$ pour tout $b \in B$.

Proposition. *Si f est continue sur $A - \{a\}$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe et est finie alors f est prolongeable par continuité sur A.*

Exemples. $x \in]0,1] \mapsto x \sin \frac{1}{x}$ et $x \in]0,1] \mapsto \sin \frac{1}{x}$

1.2. Discontinuités.

Définition. Si f n'est pas continue en $a \in A$, on dit que f est discontinue en a. De plus,

(*i*) la discontinuité est dite de première espèce si $a \in \overset{\circ}{A}$ et si $f(a-0)$ et $f(a+0)$ existent,

(*ii*) sinon, la discontinuité est dite de seconde espèce.

Exemple. La fonction $x \mapsto E(x)$ est discontinue en tout $n \in \mathbb{Z}$ et ses discontinuités sont de première espèce.

Exemple. La fonction $x \mapsto \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est discontinue en 0 et la discontinuité est de seconde espèce.

Définition. On dit que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est réglée si ses discontinuités sont de première espèce.

Proposition. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est réglée alors l'ensemble de ses points de discontinuité est au plus dénombrable.*

Exemple. $x \in [0,1] \mapsto \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

1.3. Connexité et compacité.

Théorème des valeurs intermédiaires. *Si f est continue sur un intervalle I alors $f(I)$ est un intervalle.*

Corollaire. *L'image d'un segment par une application continue est un segment.*

Proposition. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Contre-exemple. $x \in]0,1] \mapsto \frac{1}{x}$

Conséquence. On peut définir $\|f\|_\infty = \sup\limits_{a \leq x \leq b} |f(x)|$.

Théorème de Weierstrass. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et si $\varepsilon > 0$ alors il existe une fonction polynômiale $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$.*

Application. Théorème tauberien fort.

Remarque. Sur $\mathbb{R}$, c'est faux si f n'est pas elle-même polynômiale.

Définition. On dit que f est uniformément continue sur A si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \, (|x-y| < \alpha, x, y \in A) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Remarque. Une fonction uniformément continue est continue mais la réciproque est fausse ($x \mapsto x^2$).

Proposition. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f est uniformément continue.*

2. Dérivabilité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

2.1. Généralités.

Définition. On dit que f est dérivable en $x_0 \in I$ si la limite $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I - \{x_0\}}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et on la note alors $f'(x_0)$. Si f est dérivable en tout $x_0 \in I$, on dit que f est dérivable sur I et l'application $f' : x \mapsto f'(x)$ est appelée l'application dérivée.

Si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I \cap]x_0, +\infty[}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0)$ existe, on dit que f est dérivable à droite en x_0. On définit de façon analogue la dérivabilité à gauche et $f'_g(x_0)$.

Exemples. $x \mapsto x^n, n \geq 0$, et $x \mapsto |x|$

Proposition. *L'ensemble des fonctions $I \to \mathbb{R}$ dérivables sur I est une $\mathbb{R}$-algèbre et*

$$(f+g)' = f' + g' \ , \ (\lambda f)' = \lambda f' \ , \ (fg)' = f'g + fg' \ ,$$

et lorsque c'est défini :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad \text{et} \quad (h \circ f)' = h' \circ f \times f'.$$

Exemple. Les fonctions polynômiales sont dérivables.

Proposition. *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*

Contre-exemple. $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ est dérivable en 0 mais n'est continue nulle part ailleurs

Contre-exemple. On note Δ la fonction 1-périodique telle que $\Delta(x) = |x|$ pour tout $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ puis on pose

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} \Delta(2^p x)$$

alors f est continue sur $\mathbb{R}$ mais nulle part dérivable.

Corollaire. *L'ensemble des fonctions continues sur I mais nulle part dérivables est dense dans $C^0(I)$.*

2.2. **Théorème de Rolle.**

Théorème de Rolle. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Théorème des accroissements finis. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.*

Application. Méthode de Newton pour les polynômes.

2.3. **Continuité de la dérivée.**

Une fonction dérivée n'est pas forcément continue.

Exemple. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Proposition. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable alors l'ensemble des points de continuité de f' est dense dans $\mathbb{R}$.*

Remarque. Il existe une fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que l'ensemble des points de discontinuité de f' est dense dans $[0, 1]$.

Théorème de Darboux. *Si f est dérivable sur I alors $f'(I)$ est un intervalle.*

3. Monotonie

Corollaire. *Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$, alors f induit un homéomorphisme de $[a, b]$ sur $f([a, b])$.*

Proposition. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ et soit $x_0 \in \overset{\circ}{I}$.*

(i) f constante $\iff$ $f'(t) = 0$ pour tout $t \in \overset{\circ}{I}$.

(ii) f croissante $\iff$ $f'(t) \geq 0$ pour tout $t \in \overset{\circ}{I}$.

(iii) Si f a un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Lemme de Riesz. *Soit g une fonction continue sur $[a, b]$ et $E = \{x \in]a, b[; \exists \xi > x / g(\xi) > g(x)\}$. Si E est non vide alors E est une réunion disjointe $E = \bigcup]a_k, b_k[$ avec $g(a_k) \leq g(b_k)$.*

Théorème de Lebesgue. *Une fonction monotone est dérivable presque partout.*

4. Dérivées d'ordre supérieur

On définit les dérivées successives d'une fonction f en posant $f^{(0)} = f$ et $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ pour tout $n \geq 0$.

Exemple. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais pas deux fois dérivable en 0

Définition. Si f admet une dérivée d'ordre k continue sur I, on dit que f est de classe C^k et on note $f \in C^k(I)$. Si f admet des dérivées de tout ordre sur I, on dit que f est de classe C^∞ et on note $f \in C^\infty(I)$.

Exemple. $x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ est de classe C^∞

Formule de Taylor avec reste intégral. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1}, alors*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Application. Si f est C^∞ et si $f^{(k)}(0) = 0$ pour $0 \leq k \leq p$ alors au voisinage de 0, on a $f(x) = x^p g(x)$ avec g C^∞.

Proposition. *Il existe φ de classe C^∞ telle que $\varphi(x) = 1$ pour $|x| \leq 1$ et $\varphi(x) = 0$ pour $|x| \geq 2$.*

Théorème de Borel. *Si $(a_k)_{k \geq 0}$ est une suite de $\mathbb{R}$ alors il existe une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que $u^{(k)}(0) = a_k$ pour tout $k \geq 0$.*

Développements

Théorème tauberien fort.

Méthode de Newton pour les polynômes.

Exemple de fonction continue nulle part dérivable.

Théorème de Borel.

Références

[1] A. Chambert-Loir, S. Fermigier et V. Maillot, *Exercices d'analyse 1*, Masson, 1997.

[2] B. Gostiaux, *Cours de Mathématiques spéciales*, P.U.F., 1993.

[3] X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.

[4] A. Pommellet, *Cours d'analyse*, Ellipses, 1994.

[5] F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Cassini, 1999.