Espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Par Nicolas Lanchier [1]

1 Propriétés classiques des espaces $L^p(\Omega)$.

Définition 1.1 — Soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$. On appelle espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'espace

$$L^p(\Omega) \;=\; \Big\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \,,\; f \text{ mesurable et } |\, f\,|^p \in L^1(\Omega) \Big\}$$

Pour toute fonction $f \in L^p(\Omega)$, on pose

$$\|\, f\,\|_{L^p} \;=\; \Big(\int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu(x) \Big)^{1/p}$$

[2], Sect. 4.2

Définition 1.2 — L'espace de Lebesgue $L^\infty(\Omega)$ est défini par

$$L^\infty(\Omega) \;=\; \Big\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \,,\; f \text{ mesurable et } \exists\; C \geq 0 \text{ tel que } |\, f(x)\,| \leq C \quad \mu - \text{pp} \Big\}$$

Pour toute fonction $f \in L^\infty(\Omega)$, on pose

$$\|\, f\,\|_{L^\infty} \;=\; \inf \Big\{ C \leq 0 \,,\; |\, f(x)\,| \leq C \quad \mu - \text{pp} \Big\}$$

[2], Sect. 4.2

Théorème 1.3 (inégalité de Hölder) — Soient $1 \leq p \leq \infty$, q l'exposant conjugué de p, $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$. Alors $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega |\, fg\,| \, d\mu(x) \;\leq\; \|\, f\,\|_{L^p} \; \|\, g\,\|_{L^q}$$

[2], Sect. 4.2

Corollaire 1.4 — Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $\|\cdot\|_{L^p}$ est une norme sur $L^p(\Omega)$. [2], Sect. 4.2

Théorème 1.5 (Lebesgue) — Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions dans $L^p(\Omega)$, $p \geq 1$, convergeant μ-presque partout vers une fonction mesurable f. Si la condition de domination

$$\exists\; g \in L^p(\Omega) \qquad \text{tel que} \qquad \forall\; n \geq 0 \qquad |f_n| \leq g \quad \mu - \text{pp}$$

est vérifiée alors $f \in L^p(\Omega)$ et $f_n \xrightarrow{L^p} f$. [4], Sect. 1.7

Théorème 1.6 (Riesz-Fischer) — Pour tout espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et tout $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach. [2], Sect. 4.2

Théorème 1.7 — Soit $(f_n)_{n \geq 0} \subset L^p(\Omega)$ et supposons que $f_n \xrightarrow{L^p} f$. Alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k \geq 0}$ qui converge μ-presque partout vers f sur Ω. [2], Sect. 4.2

Théorème 1.8 — Pour tout espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, l'espace de Lebesgue $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert. [2], Sect. 5.1

Théorème 1.9 (Müntz) — Soient $C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et α_n, $n \geq 0$, une suite strictement croissante à valeurs positives. Alors, l'espace vectoriel

$$E \;=\; \text{vect}\,(\,f_n(x) = x^{\alpha_n}\;;\; n \geq 0\,)$$

est dense dans $C([0,1],\mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_{L^2}$ si et seulement si la série de terme générale α_n^{-1} diverge. [3], Sect. 4.6

Théorème 1.10 (théorème de représentation de Riesz) — Soient $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ un espace mesuré, $1 < p < \infty$, q l'exposant conjugué de p et $\varphi : L^p(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire. Alors il existe une unique fonction $u \in L^q(\Omega)$ telle que

$$\langle \varphi \cdot f \rangle \;=\; \int_\Omega u\, f\, d\mu \qquad \text{pour tout } f \in L^p(\Omega)$$

De plus, $\|\,u\,\|_{L^q} = \|\,\varphi\,\|$. [2], Sect. 4.3

2 Intégrabilité uniforme.

Dans toute cette partie, $(X_i)_{i\in I}$ désigne une famille quelconque de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$.

Proposition 2.1 — Une variable aléatoire X est intégrable si et seulement si

$$\int_{|X|\geq c} |X|\,\mathrm{d}\mathbf{P} \;\xrightarrow[c\to\infty]{}\; 0$$

Définition 2.2 — La famille $(X_i)_{i\in I}$ est dite uniformément intégrable si

$$\sup_{i\in I} \int_{|X_i|\geq c} |X_i|\,\mathrm{d}\mathbf{P} \;\xrightarrow[c\to\infty]{}\; 0$$

[1], Sect. 3.9

Définition 2.3 — La famille $(X_i)_{i\in I}$ est dite équi-intégrable si

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \eta > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall\, A \in \mathcal{F} \qquad \mathbf{P}(A) \leq \eta \quad \Longrightarrow \quad \sup_{i\in I} \int_A |X_i|\,\mathrm{d}\mathbf{P} \;\leq\; \varepsilon$$

[1], Sect. 3.9

Théorème 2.4 — Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. la famille $(X_i)_{i\in I}$ est uniformément intégrable ;
2. la famille $(X_i)_{i\in I}$ est équi-intégrable et bornée dans $L^1(\Omega)$. [1], Sect. 3.9

Théorème 2.5 — S'il existe un réel $p > 1$ tel que la famille $(X_i)_{i\in I}$ soit bornée dans $L^p(\Omega)$ alors $(X_i)_{i\in I}$ est uniformément intégrable.

Définition 2.6 — Une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires converge en probabilité vers une variable aléatoire X si

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\,(\,|X_n - X| > \varepsilon\,) \;=\; 0$$

ce que l'on note $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$.

Théorème 2.7 (Lebesgue) — Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $X_n \xrightarrow{L^1} X$;
2. $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ et $(X_n)_{n\geq 0}$ est uniformément intégrable.

3 Produit de convolution. Applications.

THÉORÈME 3.1 — Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $y \mapsto f(x-y)\,g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$. De plus, le produit de convolution de f et g défini par

$$(f * g)(x) \;=\; \int f(x-y)\,g(y)\,dy \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

est une fonction de $L^p(\mathbb{R}^N)$ et

$$\| f * g \|_{L^p} \;=\; \| f \|_{L^1} \; \| g \|_{L^p}$$

[2], Sect. 4.4

PROPOSITION 3.2 — Si $f \in C_c^k(\mathbb{R}^N)$ et si $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ alors

$$f * g \in C^k(\mathbb{R}^N) \qquad \text{et} \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n \quad |\alpha| \leq k \qquad D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g$$

[2], Sect. 4.4

PROPOSITION 3.3 — Pour toute fonction f dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ et toute fonction g dans $L^p(\mathbb{R}^N)$

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{\operatorname{supp} f \;+\; \operatorname{supp} g}$$

[2], Sect. 4.4

DÉFINITION 3.4 (SUITES RÉGULARISANTES) — On appelle suite régularisante toute suite de fonctions $(\rho_n)_{n \geq 1}$ telle que pour tout $n \geq 1$

$$\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \qquad \operatorname{supp} \rho_n \subset B(0, 1/n) \qquad \int \rho_n \;=\; 1$$

[2], Sect. 4.4

THÉORÈME 3.5 — Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$, $\rho_n * f \xrightarrow{L^p} f$. [2], Sect. 4.4

COROLLAIRE 3.6 — Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Alors l'espace $C_c^\infty(\Omega)$ des fonctions C^∞ à support compact est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$. [2], Sect. 4.4

THÉORÈME 3.7 (RIESZ-FRECHET-KOLMOGOROV) — Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\omega \subset\subset \Omega$ une partie compacte de Ω et $\mathcal{F}$ un sous-ensemble borné de $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\| \tau_h f - f \|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon \qquad \forall\ |h| < \eta \qquad \forall\ f \in \mathcal{F}$$

alors $\mathcal{F}$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$. [2], Sect. 4.5

Références

[1] Paulo Baldi, Laurent Mazliak, Pierre Priouret. *Martingales et chaînes de Markov.* Hermann, 1998.

[2] Haïm Brézis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Dunod, 1999.

[3] Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse.* Ellipses, 1994.

[4] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe.* Masson, 1995.