Suites et séries de fonctions : exemples et contre-exemples.

Par Nicolas Lanchier [1]

1 Modes de convergence.

DÉFINITION 1.1 — Soient X un ensemble, (E, d) un espace métrique et f_n, $n \geq 0$ une suite de fonctions de X dans E. On dit que f_n converge simplement vers f si

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, x \in X \quad \exists\, n_0 \geq 0 \quad \text{tel que} \quad \forall\, n \geq n_0 \quad d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$$

et que f_n converge uniformément vers f si

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \geq 0 \quad \text{tel que} \quad \forall\, x \in X \quad \forall\, n \geq n_0 \quad d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$$

PROPOSITION 1.2 — Si E est un espace complet, la suite f_n converge uniformément sur X vers une certaine fonction f si et seulement si f_n est de Cauchy. [3], Sect. 4.3

DÉFINITION 1.3 — Soient E un espace de Banach et f_n, $n \geq 0$ une suite de fonctions de X dans E. La série $\sum f_n$ est dite normalement convergente si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| f_n \|_\infty < +\infty$$

EXEMPLE 1.4 (LEMME D'ABEL) — Soient $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière, $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $a_n z_0^n$ soit bornée et $r < |z_0|$. Alors la série converge normalement dans le disque $\{ z \in \mathbb{C} \,;\, |\, z \,| \leq r \}$. [3], Sect. 4.4

EXEMPLE 1.5 — Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction 2π-périodique, continue et C^1 par morceaux alors la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$. [3], Sect. 4.5

THÉORÈME 1.6 (DINI) — Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de fonctions réelles continues sur un espace compact X. Si la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers une fonction f continue sur X alors la convergence est uniforme. [3], Sect. 4.3

2 Propriétés de la limite.

THÉORÈME 2.1 — Soit f_n, $n \geq 0$, une suite de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si f_n converge uniformément vers une certaine fonction f alors f est continue sur $\mathbb{R}$. [3], Sect. 4.3

THÉORÈME 2.2 — Soit f_n, $n \geq 0$, une suite de fonctions de classe C^1 d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que

1. il existe $x_0 \in I$ tel que la suite $f_n(x_0)$ converge ;
2. la suite f_n' converge uniformément sur I vers une certaine fonction g.

Alors f_n converge uniformément sur I vers une fonction f de classe C^1 et dont la dérivée f' est égale à g. [3], Sect. 4.3

THÉORÈME 2.3 — Soit f_n, $n \geq 0$, une suite de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si f_n converge simplement vers une fonction f alors l'ensemble des points de continuité de f est dense dans $\mathbb{R}$. [3], annexe A

Corollaire 2.4 — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors l'ensemble des points de continuité de la fonction dérivée f' est une partie dense de $\mathbb{R}$. [3], annexe A

Théorème 2.5 (Lebesgue) — Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions dans $L^p(\Omega)$, $p \geq 1$, convergeant μ-presque partout vers une fonction mesurable f. Si la condition de domination

$$\exists\, g \in L^p(\Omega) \qquad \text{tel que} \qquad \forall\, n \geq 0 \qquad |f_n| \leq g \quad \mu - \text{pp}$$

est vérifiée alors $f \in L^p(\Omega)$ et $f_n \xrightarrow{L^p} f$. [4], Sect. 1.7

Théorème 2.6 — L'ensemble des fonctions f continues 2π-périodiques dont la série de Fourier ne converge pas simplement vers f est un G_δ dense. [4], Sect. 5.3

3 Théorèmes de densité.

Théorème 3.1 (Weierstrass) — L'espace des polynômes est dense dans l'espace des fonctions continues définies sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. [3], Sect. 4.6

Théorème 3.2 — Pour tout $a > 1$, notons f_a la fonction définie par

$$f_a(x) \;=\; \frac{1}{x-a} \qquad x \in [0,1]$$

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels strictement supérieurs à 1 et de limite $+\infty$. Alors l'espace vectoriel $V = \mathrm{vect}(f_{a_n}\,,\, n \geq 0)$ est dense dans $C([0,1],\mathbb{R})$. [2], Sect. 2.1

Théorème 3.3 — L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ nulle part dérivables est dense dans l'espace des fonctions continues. [3], annexe A

Exemple 3.4 — On définit sur $\mathbb{R}$ la suite de fonctions $f_n(x) = 10^{-n}\{\,10^n x\,\}$, où $\{x\}$ désigne la distance de x à l'entier le plus proche. Alors la fonction

$$f(x) \;=\; \sum_{n\geq 0} f_n(x)$$

est continue sur $\mathbb{R}$, nulle part dérivable. [5], Sect. 8.1

Théorème 3.5 (Müntz) — Soient $C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et α_n, $n \geq 0$, une suite strictement croissante à valeurs positives. Alors, l'espace vectoriel

$$E \;=\; \mathrm{vect}\,(\, f_n(x) = x^{\alpha_n}\,;\, n \geq 0\,)$$

est dense dans $C([0,1],\mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_{L^2}$ si et seulement si la série de terme générale α_n^{-1} diverge. [3], Sect. 4.6

Références

[1] Haïm Brézis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Dunod, 1999.

[2] Stéphane Gonnord, Nicolas Tosel. *Thèmes d'analyse pour l'agrégation. Topologie et analyse fonctionnelle.* Ellipses, 1996.

[3] Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse.* Ellipses, 1994.

[4] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe.* Masson, 1995.

[5] Claude Zuily, Hervé Queffélec. *Eléments d'analyse pour l'agrégation.* Masson, 1995.