Exemples d'étude de fonctions définies par des séries.

Par Nicolas Lanchier [1]

1 Construction d'exemples et de contre-exemples.

Lemme 1.1 (Borel) — Pour toute suite de complexes a_k, $k \geq 0$, et pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $f^{(k)}(x_0) = a_k$, $\forall\, k \geq 0$. [4], Sect. 8.6

Théorème 1.2 — L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ nulle part dérivables est dense dans l'espace des fonctions continues. [2], annexe A

Exemple 1.3 — On définit sur $\mathbb{R}$ la suite de fonctions $f_n(x) = 10^{-n}\{\,10^n x\,\}$, où $\{x\}$ désigne la distance de x à l'entier le plus proche. Alors la fonction

$$f(x) \;=\; \sum_{n \geq 0} f_n(x)$$

est continue sur $\mathbb{R}$, nulle part dérivable. [4], Sect. 8.1

2 Exemples d'utilisation des séries de Fourier.

Théorème 2.1 — Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction 2π-périodique, continue et C^1 par morceaux alors la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$. [2], Sect. 4.5

Théorème 2.2 — L'ensemble des fonctions f continues 2π-périodiques dont la série de Fourier ne converge pas simplement vers f est un G_δ dense. [3], Sect. 5.3

Théorème 2.3 (égalité de Bessel-Parseval) — Si f vérifie les conditions de Dirichlet alors la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ converge. De plus,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt$$

[2], Sect. 4.5

Théorème 2.4 (inégalité isopérimétrique) — Soient $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une courbe de Jordan C^1 par morceaux, de longueur L, enfermant une surface S. Alors $L^2 \geq 4\pi S$. De plus, $L^2 = 4\pi S$ si et seulement si γ définit un cercle parcouru une fois. [4], Sect. 4.6

Théorème 2.5 — Soient $T > 0$, $R_T = \,]0,\pi[\, \times \,]0,T[$ et $\varphi : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$. Alors il existe une suite réelle b_n, $n \geq 0$ telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \;<\; \infty \qquad \text{et} \qquad \varphi(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} b_n \, \sin(nx) \quad \forall\, x \in [0,\pi]$$

Application 2.6 (équation de la chaleur) — Il existe une unique fonction Φ continue sur l'espace produit $[0,\pi] \times [0,T]$ telle que

1. Φ est de classe C^2 et $\partial_x^2\, \Phi - \partial_t\, \Phi = 0$ sur R_T ;
2. pour tout $t \in [0,T]$, $\Phi(0,t) = \Phi(\pi,t)$;
3. et pour tout $x \in [0,\pi]$, $\Phi(x,0) = \varphi(x)$. [2], Sect. 5.5

3 Exemples d'utilisation des séries entières.

THÉORÈME 3.1 (ABEL NON TANGENTIEL) — Soient $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et $z_0 \in \mathbb{C}$ de module R tel que la série converge pour $z = z_0$. Alors pour tout $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\rho \in [0, 2\cos\varphi[$

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \Delta(z_0,\rho,\varphi)}} f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z_0^n$$

où $\Delta(z_0, \rho, \varphi) \;=\; \{\, z_0(1 - re^{i\theta})\,;\, 0 \le r \le \rho, |\theta| \le \varphi \,\}$ [2], Sect. 4.4

APPLICATION 3.2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \;=\; \frac{\pi}{4} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \;=\; \log 2$$

PROPOSITION 3.3 (PROLONGEMENT DE LA FONCTION Γ) — La fonction Γ définie par

$$\Gamma(t) \;=\; \int_0^{+\infty} x^{t-1}\, e^{-x}\, dx \qquad \forall\, t > 0$$

admet un prolongement analytique dans l'ouvert $\Omega = \{\, z \in \mathbb{C}\,,\, \mathrm{Re}(z) > 0 \,\}$. [4], Sect. 9.2

THÉORÈME 3.4 (LIOUVILLE) — Si f est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R = \infty$ est bornée sur $\mathbb{C}$ alors f est constante. [2], Sect. 4.4

APPLICATION 3.5 (D'ALEMBERT) — Le corps des nombres complexes est algébriquement clos.

THÉORÈME 3.6 (PRINCIPE DES ZÉROS ISOLÉS) — Soient f la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Si f n'est pas identiquement nulle alors l'ensemble $Z(f)$ des zéros de f n'admet pas de point d'accumulation dans $D(0, R)$. [3], Sect. 10.4

APPLICATION 3.7 — Pour tout $a > 1$, notons f_a la fonction définie par

$$f_a(x) \;=\; \frac{1}{x-a} \qquad x \in [0,1]$$

Soit $(a_n)_{n\ge 0}$ une suite de réels strictement supérieurs à 1 et de limite $+\infty$. Alors l'espace vectoriel $V = \mathrm{vect}(f_{a_n}\,,\, n \ge 0)$ est dense dans $C([0,1], \mathbb{R})$. [1], Sect. 2.1

Références

[1] Stéphane Gonnord, Nicolas Tosel. *Thèmes d'analyse pour l'agrégation. Topologie et analyse fonctionnelle.* Ellipses, 1996.

[2] Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse.* Ellipses, 1994.

[3] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe.* Masson, 1995.

[4] Claude Zuily, Hervé Queffélec. *Eléments d'analyse pour l'agrégation.* Masson, 1995.