Analyse 45 – Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$.

On note Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $\Delta = D(0,1)$.

1. Généralités sur les fonctions holomorphes

1.1. Caractérisations.

Définition. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-différentiable en $z_0 \in \Omega$ si $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0)$ existe.

Définition et proposition. On dit que f est holomorphe sur Ω, et on note $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ si f vérifie les conditions équivalentes suivantes :

- (i) f est différentiable en tout point de Ω
- (ii) f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et, en notant $u = \mathrm{Re}\ f$ et $v = \mathrm{Im}\ f$, on a $\partial_x u = \partial_y v$ et $\partial_y u = -\partial_x v$.
- (iii) $\partial_{\overline{z}} f = 0$ où $\partial_{\overline{z}} = \frac{1}{2}\left[\partial_x + i\partial_y\right]$.

Exemple. Une série entière est holomorphe sur son disque de convergence.

Exemple. Si γ est un chemin fermé $\mathcal{C}^1$, on appelle $\mathrm{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma^\star} \frac{d\zeta}{\zeta - a}$ l'indice de γ par rapport a. L'application $z \mapsto \mathrm{Ind}(\gamma, z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \gamma^\star$.

Propriétés. *$\mathcal{H}(\Omega)$ est une algèbre dont les inversibles sont les $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ ne s'annulant pas. De plus, si $f \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ et $g \in \mathcal{H}(\Omega_2)$ avec $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$ alors $g \circ f \in \mathcal{H}(\Omega_1)$.*

1.2. Formule de Cauchy et analyticité.

Dans cette section, Ω est un disque.

Proposition. *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\}) \cap \mathcal{C}(\Omega)$ alors f admet une primitive.*

Théorème de Cauchy. *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\}) \cap \mathcal{C}(\Omega)$ et si γ est un chemin fermé $\mathcal{C}^1$ alors $\int_{\gamma^\star} f(z)dz = 0$.*

Formule de Cauchy. *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ alors pour tout $z \in D(a,r)$, $f(z) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$.*

Corollaire. *Une fonction holomorphe est analytique.*

Application. Inégalités de Cauchy.

Proposition. *Soit $(f_n)_n$ une suite de $\mathcal{H}(\Omega)$ tendant uniformément sur les compacts vers une fonction f. Alors $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et la suite $(f_n')_n$ tend uniformément sur les compacts vers f'.*

1.3. Théorèmes fondamentaux.

Théorème de Morera. *Si $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ et si $\int_{\gamma^\star} f(z)dz = 0$ pour tout chemin fermé γ $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Proposition. *Si $f \in \mathcal{C}(\Omega \times [a,b])$ et si, pour chaque $t \in [a,b]$, $z \mapsto f(z,t)$ est holomorphe sur Ω alors $\varphi(z) = \int_a^b f(z,t)dt$ est holomorphe sur Ω et $\varphi'(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt$.*

Exemple. Prolongement analytique de la fonction ζ.

Théorème des zéros isolés. *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ s'annule sur un ensemble ayant un point d'accumulation alors f est nulle.*

Application. $\mathcal{H}(\Omega)$ est intègre.

Théorème de l'application ouverte. *L'image de Ω par une application holomorphe est un domaine de $\mathbb{C}$.*

Principe du maximum. *Une fonction holomorphe admettant un extremum local est constante.*

Théorème de Liouville. *Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ est bornée alors f est constante.*

Application. $\mathbb{C}$ est algébriquement clos

2. Singularités et fonctions méromorphes

2.1. Singularités et séries de Laurent.

Définition et proposition. Si f est holomorphe sur une couronne $C(a, R_1, R_2)$ alors f admet un développement en série de Laurent $f(z) = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-a)^n$ qui converge uniformément sur les compacts de $C(a, R_1, R_2)$. On appelle résidu de f en a, le nombre $\mathrm{Res}(f, a) = a_{-1}$.

Définition. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ alors on dit que f a en a

- (i) une singularité éliminable si f se prolonge holomorphiquement à Ω,
- (ii) un pôle d'ordre $p \geq 1$ si $f(z) = \sum\limits_{n=-p}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ avec $a_{-p} \neq 0$,
- (iii) une singularité essentielle si $f(z) = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-a)^n$ avec une infinité de a_{-n} non nuls.

Proposition. *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ est bornée au voisinage de a alors a est éliminable.*

Théorème de Casorati-Weierstrass. *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ avec a essentielle alors, pour tout $r > 0$, $f(D(a,r) \setminus \{a\})$ est dense dans $\mathbb{C}$.*

2.2. Fonctions méromorphes et résidus.

Définition. On dit que f est méromorphe sur Ω, et on note $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, si et seulement s'il existe $A \subset \Omega$ discrète avec $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus A)$ et A l'ensemble des pôles de f.

Exemple. $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ avec $-\mathbb{N}$ pour ensemble des pôles et ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$.

Exemple. $\zeta \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ avec 1 pour seul pôle.

Théorème des résidus. *Soit $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $\mathcal{D}$ un domaine relativement compact dans Ω dont le bord $\partial\mathcal{D}$ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on note $a_1, \ldots, a_p$ les pôles de f dans $\mathcal{D}$ alors $\displaystyle\int_{\partial\mathcal{D}} f(z)dz = 2i\pi \sum_{j=1}^{p} \mathrm{Res}(f, a_j)$.*

Application. Principe d'argument.

Application. Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2}dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$.

3. L'espace $\mathcal{H}(\Omega)$

3.1. L'espace métrique $\mathcal{H}(\Omega)$.

On note $(K_n)_{n\geq 0}$ une suite exhaustive de compacts de Ω et on considère sur $\mathcal{H}(\Omega)$ la distance d définie par

$$d(f,g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\sup_{z\in K_n} |f(z)-g(z)|}{1+\sup_{z\in K_n} |f(z)-g(z)|}.$$

Proposition. *$\mathcal{H}(\Omega)$ est complet pour cette distance.*

Théorème de Hurwitz. *Soit $(f_n)_n$ une suite de $\mathcal{H}(\Omega)$ tendant vers une fonction f. Si les f_n sont injectives alors f est constante ou injective.*

Théorème de Montel. *Les compacts de $\mathcal{H}(\Omega)$ sont les fermés bornés.*

3.2. Théorème de Weierstrass sur $\mathbb{C}$.

Théorème de Weierstrass. *Soit $(a_n)_n$ une suite d'éléments distincts de $\mathbb{C}$ telle que $|a_n| \to +\infty$ et $(k_n)_n$ une suite de $\mathbb{N}$. Il existe $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ dont les zéros sont les a_n avec multiplicité k_n.*

Application. Pour tout domaine Ω, il existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ qui ne se prolonge holomorphiquement à aucun domaine $\mathcal{U} \supsetneq \Omega$.

Corollaire. *$\mathcal{M}(\mathbb{C})$ est le corps des fractions de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.*

3.3. Espace de Bergman.

Définition. L'*espace de Bergman* du disque unité $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}$ est défini par $\mathrm{A}^2(\mathbb{D}) = L^2(\mathbb{D}) \cap \mathcal{H}(\mathbb{D})$ et est muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}dz$.

Proposition. *$\mathrm{A}^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert.*

Proposition. *La famille $(e_n)_n$, donnée par $e_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}z^n$, est une base hilbertienne de $\mathrm{A}^2(\mathbb{D})$.*

Application. $k(\zeta,z) = \dfrac{1}{\pi(1-\overline{\zeta}z)^2}$ est un noyau reproduisant

4. Applications conformes

4.1. Représentation conforme.

Une application f est conforme sur Ω si f conserve les angles orientés.

Définition. On dit qu'une application $f : \Omega \to \Omega'$ est un biholomorphisme si f est holomorphe, bijective et de fonction réciproque holomorphe.

$\mathrm{Aut}(\Omega)$ est l'ensemble des biholomorphismes de Ω sur Ω.

Un biholomorphisme est une application conforme.

Théorème. *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ alors f est injective si et seulement si f est un biholomorphisme de Ω sur $f(\Omega)$.*

Lemme de Schwarz. *Soit $f : \Delta \to \Delta$ holomorphe avec $f(0) = 0$. Alors $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \Delta$. Si de plus il existe $z_0 \in \Delta$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$ ou si $|f'(0)| = 1$, alors il existe θ tel que $f(z) = e^{i\theta}z$ pour tout $z \in \Delta$.*

Application. $\mathrm{Aut}(\Delta) = \{z \mapsto e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}; |a| < 1\ ,\ \theta \in \mathbb{R}\}$

Théorème de représentation conforme. *Tout domaine simplement connexe distinct de $\mathbb{C}$ est biholomorphe à Δ.*

4.2. Homographies.

On note $\widehat{\mathbb{C}}$ la sphère de Riemann.
Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est méromorphe si et seulement si $f : \Omega \to \widehat{\mathbb{C}}$ est holomorphe.

Définition. On appelle homographie tout application du type $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ où $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ vérifient $ad-bc \neq 0$.

Si φ est une homographie alors $\varphi \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$.

Propriété. *L'action des homographies sur $\widehat{\mathbb{C}}$ est 3-transitive et laisse invariant le birapport.*

Théorème. $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) \simeq PSL_2(\mathbb{C})$

Application. $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0,1\}) \simeq S_3$

Application. Déterminer $f : D \to \Delta$ biholomorphe où $D = \{\rho e^{i\theta}; 0 < \rho < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\}$.

Développements

Prolongement de la fonction ζ.

Noyau de Bergman.

Théorème de représentation conforme.

Références

[1] H. Buchwalter, *Variations sur l'analyse en maîtrise de mathématiques*, Ellipses, 1992.

[2] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, 1985.

[3] S. Chatterji, *Cours d'Analyse, tome 2*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1997.

[4] H. Queffélec et C. Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2002.