Exemples de problèmes d'interversion de limites.

Par Nicolas Lanchier [1]

1 Régularité de la limite d'une suite de fonctions.

THÉORÈME 1.1 — Soient E et F deux espaces métriques et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions continues de E dans F. Si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers $f : E \longrightarrow F$ alors f est continue sur E. [3], Sect. 4.3

THÉORÈME 1.2 — Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, E un espace de Banach et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de classe C^1 de I dans E. Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. il existe $x_0 \in I$ tel que la suite $(f_n(x_0))_{n\geq 0}$ converge ;
2. la suite $(f'_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur I vers une certaine fonction g ;

alors $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur I vers une fonction f de classe C^1 et vérifiant $f' = g$. [3], Sect. 4.3

THÉORÈME 1.3 (ABEL RADIAL) — Soient $f(z) = \sum a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0, \infty[$ et $z_0 \in \mathbb{C}$, $|z_0| = R$. Si

$$\sum a_n\, z_0^n \ < \ \infty$$

alors $f(z)$ converge uniformément sur le segment $[0, z_0]$. [5], Sect. 3.1

APPLICATION 1.4

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \ = \ \frac{\pi}{4} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \ = \ \log 2$$

2 Interversion d'une limite et d'une intégrale. Applications.

THÉORÈME 2.1 — Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, E un espace de Banach et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de I dans E convergeant uniformément vers une certaine fonction f. Alors f est intégrable et

$$\int_a^b f(x)\, dx \ = \ \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

[3], Sect. 4.3

THÉORÈME 2.2 (BEPPO-LÉVI) — Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite monotone de fonctions intégrables convergeant μ-presque partout vers une fonction $f \in L^1(\Omega)$. Alors, $f_n \longrightarrow f$ dans $L^1(\Omega)$. [4], Sect. 1.6

THÉORÈME 2.3 (LEBESGUE) — Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions dans $L^p(\Omega)$, $p \geq 1$, convergeant μ-presque partout vers une fonction mesurable f. Si la condition de domination

$$\exists\, g \in L^p(\Omega) \qquad \text{tel que} \qquad \forall\, n \geq 0 \qquad |f_n| \leq g \quad \mu - \text{pp}$$

est vérifiée alors $f \in L^p(\Omega)$ et $f_n \xrightarrow{L^p} f$. [4], Sect. 1.7

Théorème 2.4 — Soient $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, E un espace métrique et f une fonction complexe définie sur $E \times X$. Si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. pour tout $t \in E$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable ;
2. pour presque tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est continue sur E ;
3. il existe une fonction $g \in L^1(X)$ telle que pour presque tout $x \in X$

$$|f(t,x)| \ \leq \ g(x) \qquad \forall\, t \in E$$

alors la fonction $t \ \mapsto \displaystyle\int f(t,x)\, d\mu(x)$ est continue sur E. [5], Sect. 9.1

Proposition 2.5 (nombre de montées) — Soit X une surmartingale définie à l'infini. Alors pour tous $a < b$

$$\mathbf{E}\,(M_a^b) \ \leq \ \frac{1}{b-a}\,\mathbf{E}\,[(X_\infty - a)^-]$$

où M_a^b désigne le nombre de montées de la surmartingale de a vers b.

Théorème 2.6 (Lebesgue) — Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions dans $L^p(\Omega)$, $p \geq 1$, convergeant μ-presque partout vers une fonction mesurable f. Si la condition de domination

$$\exists\, g \in L^p(\Omega) \qquad \text{tel que} \qquad \forall\, n \geq 0 \qquad |f_n| \leq g \quad \mu - \text{pp}$$

est vérifiée alors $f \in L^p(\Omega)$ et $f_n \xrightarrow{L^p} f$. [4], Sect. 1.7

3 Intégrabilité uniforme.

Dans toute cette partie, $(X_i)_{i\in I}$ désigne une famille quelconque de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Proposition 3.1 — Une variable aléatoire X est intégrable si et seulement si

$$\int_{|X|\geq c} |X|\,\mathrm{d}\mathbf{P} \ \xrightarrow[c\to\infty]{} \ 0$$

Définition 3.2 — La famille $(X_i)_{i\in I}$ est dite uniformément intégrable si

$$\sup_{i\in I} \int_{|X_i|\geq c} |X_i|\,\mathrm{d}\mathbf{P} \ \xrightarrow[c\to\infty]{} \ 0$$

[1], Sect. 3.9

Définition 3.3 — La famille $(X_i)_{i\in I}$ est dite équi-intégrable si

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \eta > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall\, A \in \mathcal{F} \qquad \mathbf{P}(A) \leq \eta \quad \Longrightarrow \quad \sup_{i\in I} \int_A |X_i|\,\mathrm{d}\mathbf{P} \ \leq \ \varepsilon$$

[1], Sect. 3.9

Théorème 3.4 — Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. la famille $(X_i)_{i\in I}$ est uniformément intégrable ;
2. la famille $(X_i)_{i\in I}$ est équi-intégrable et bornée dans $L^1(\Omega)$. [1], Sect. 3.9

Théorème 3.5 (Lebesgue) — Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $X_n \xrightarrow{L^1} X$;
2. $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ et $(X_n)_{n\geq 0}$ est uniformément intégrable.

4 Interversion de deux intégrales.

Théorème 4.1 (Tonelli) — Soient $(X, \mathcal{F}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ deux espaces mesurés. Supposons que pour presque tout $x \in X$,

$$\int_Y |F(x,y)|\, d\nu(y) \; < \; \infty \qquad \text{et que} \qquad \int_X d\mu(x) \int_Y |F(x,y)|\, d\nu(y) \; < \; \infty$$

Alors $F \in L^1(X \times Y)$. [2], Sect. 4.1

Théorème 4.2 (Fubini) — Soient $(X, \mathcal{F}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ deux espaces mesurés. Alors pour toute fonction $F \in L^1(X \times Y)$

$$\int_X d\mu(x) \int_Y F(x,y)\, d\nu(y) \; = \; \int_Y d\nu(y) \int_X F(x,y)\, d\mu(x) \; = \; \int\int_{X \times Y} F(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$$

[2], Sect. 4.1

Proposition 4.3 — Si pour tous i, $j \in \mathbb{N}$, $a_{i,j} \geq 0$ alors

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} \; = \; \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j}$$

[4], Sect. 1.6

Théorème 4.4 — Soit X_n une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ de transition p symétrique, à portée finie et irréductible, i.e. l'ensemble des vecteurs $x \in \mathbb{Z}^d$ tels que $p(x) \neq 0$ est une partie génératrice de $(\mathbb{Z}^d, +)$. Alors, X_n est récurrente si $d \leq 2$ et transiente sinon. [1], Sect. 4.10

Références

[1] Paulo Baldi, Laurent Mazliak, Pierre Priouret. *Martingales et chaînes de Markov.* Hermann, 1998.

[2] Haïm Brézis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Dunod, 1999.

[3] Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse.* Ellipses, 1994.

[4] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe.* Masson, 1995.

[5] Claude Zuily, Hervé Queffélec. *Eléments d'analyse pour l'agrégation.* Masson, 1995.